МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в вузы

Москва
Физматкнига
2006

ББК 22.10
Ш 12
УДК 517

Ш 12 **Методическое пособие по математике для поступающих в вузы** / Под ред. Шабунина М. И. — М.: Физматкнига, 2006. – 272 с. ISBN 5-89155-144-6

В методическое пособие включены задачи по математике, предлагавшиеся абитуриентам на вступительных экзаменах в Московском физико-техническом институте с 1991 по 2004 год. Для систематизации знаний и удобства задачи структурированы по тематическим разделам.

Для школьников старших классов и преподавателей, абитуриентов, а также студентов технических вузов, техникумов, студентов младших курсов вузов и лиц, занимающихся самообразованием.

Авторы задач: *профессора Шабунин М. И., Сидоров Ю. В., доценты Агаханов Н. Х., Баламов М. В., Коновалов С. П., Константинов Р. В., Самарова С. С., Трушин В. Б., Чехлов В. И.*
Решения задач представлены *Самаровой С. С.* (1991–1992 г. г.), *Агахановым Н. Х.* (1993–1995 г. г.), *Шабуниным М. И.* (1996–2004 г. г.)

ISBN 5-89155-144-6
9785891551442

© Коллектив авторов, 2006
© «Физматкнига», 2006

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

1.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6xz + 3x = 2z - 2, \\ xy + zy = 2(z - x + 1), \\ zy - 6xz + y = 3x + 3. \end{cases}$$

(Билет 1, 1991)

1.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (4x + y)(z + 1) + 4z = 0, \\ xy + y - x = -1, \\ xy - zy + 2z = 1 + x. \end{cases}$$

(Билет 2, 1991)

1.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3xz + 1 = 4x + 3z, \\ 4xy - 3xz = 4y - 3z + 9, \\ xy - zy = x + 3 - 2z. \end{cases}$$

(Билет 3, 1991)

1.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x + 2y)(3z + 1) = 11 + 8y, \\ xy - zy + 3 = 2x + z, \\ xy - 2x = y - 1. \end{cases}$$

(Билет 4, 1991)

1.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

(Билет 9, 1996)

1.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8x^2 - 2xy - y^2 - 30x - 9y - 8 = 0, \\ 8x^2 + 6xy + y^2 - 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

(Билет 10, 1996)

1.7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 10x - 8y - 12 = 0, \\ 2x^2 + 3xy + y^2 + x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

(Билет 11, 1996)

1.8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 + 9x + 30y + 8 = 0, \\ x^2 + 6xy + 8y^2 - 2x - 8 = 0. \end{cases}$$

(Билет 12, 1996)

1.9. Решить неравенство

$$\frac{13 - 3x + \sqrt{x^2 - x - 6}}{5 - x} > 1.$$

(Билет 5, 1997)

1.10. Решить неравенство

$$\frac{7 - 3x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x - 3} < -1.$$

(Билет 6, 1997)

1.11. Решить неравенство

$$\frac{13 - 6x + \sqrt{4x^2 - 2x - 6}}{5 - 2x} > 1.$$

(Билет 7, 1997)

1.12. Решить неравенство

$$\frac{26 - 3x + \sqrt{x^2 - 2x - 24}}{x - 10} < -1.$$

(Билет 8, 1997)

1.13. Найти все действительные корни уравнения

$$|x - \sqrt{x} - 3| + |\sqrt{x} + 7 - x| = 6.$$

(Билет 9, 1997)

1.14. Найти все действительные корни уравнения

$$|2\sqrt{x} + 1 - x| + |x - 2\sqrt{x} + 2| = 7.$$

(Билет 10, 1997)

1.15. Найти все действительные корни уравнения

$$|x - \sqrt{x} - 2| + |\sqrt{x} + 6 - x| = 8.$$

(Билет 11, 1997)

1.16. Найти все действительные корни уравнения

$$|3\sqrt{x} + 2 - x| + |x - 3\sqrt{x} + 3| = 9.$$

(Билет 12, 1997)

1.17. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2-7x-4} > -x-\frac{1}{4}.$$

(Билет 1, 1998)

1.18. Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2-8x-3} > \frac{1-2x}{3}.$$

(Билет 2, 1998)

1.19. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2+7x-4} > x-\frac{1}{4}.$$

(Билет 3, 1998)

1.20. Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2+8x-3} > \frac{1+2x}{3}.$$

(Билет 4, 1998)

1.21. Найти все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3-6x^2-xy+13x+3y+7=0.$$

(Билет 1, 1998)

1.22. Найти все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3-xy-7x+2y+23=0.$$

(Билет 2, 1998)

1.23. Найти все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3-x^2-xy-17x-3y+8=0.$$

(Билет 3, 1998)

1.24. Найти все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3-3x^2-xy-8x-2y+27=0.$$

(Билет 4, 1998)

1.25. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2-4x-2y-1=0, \\ y^2-2x+6y+14=0. \end{cases}$$

(Билет 1, 1999)

1.26. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4y + 27 = 0, \\ y^2 + 2x + 8y + 10 = 0. \end{cases}$$

(Билет 2, 1999)

1.27. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 3y - 1 = 0, \\ y^2 + 2x + 9y + 14 = 0. \end{cases}$$

(Билет 3, 1999)

1.28. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 7x - y + 11 = 0, \\ y^2 + 3x - y + 15 = 0. \end{cases}$$

(Билет 4, 1999)

1.29. Найти все пары целых чисел x, y, для которых верны неравенства

$$3y - x < 5, \quad x + y > 26, \quad 3x - 2y < 46.$$

(Билет 1, 1999)

1.30. Найти все пары целых чисел x, y, для которых верны неравенства

$$3y - 5x > 16, \quad 3y - x < 44, \quad 3x - y > 1.$$

(Билет 2, 1999)

1.31. Найти все пары целых чисел x, y, для которых верны неравенства

$$3y - 2x < 45, \quad x + y > 24, \quad 3x - y < 3.$$

(Билет 3, 1999)

1.32. Найти все пары целых чисел x, y, для которых верны неравенства

$$y - 3x < 1, \quad 2y - 3x > 19, \quad 4y - x < 78.$$

(Билет 4, 1999)

1.33. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} \geqslant 3x - 10.$$

(Билет 5, 1999)

1.34. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^3 - 22x^2 + 60x}}{x - 6} \geqslant 2x - 10.$$

(Билет 6, 1999)

1.35. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^3-27x^2+60x}}{x-5} \geqslant 3x-12.$$

(Билет 7, 1999)

1.36. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^3-27x^2+90x}}{2x-15} \geqslant x-6.$$

(Билет 8, 1999)

1.37. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} - 2xy = 16, \\ \dfrac{y^3}{2x} + 3xy = 25. \end{cases}$$

(Билет 1, 2000)

1.38. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2} + xy = 72, \\ \dfrac{y^4}{x^2} + xy = 9. \end{cases}$$

(Билет 2, 2000)

1.39. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \dfrac{y^3}{x} - 2xy = 16. \end{cases}$$

(Билет 3, 2000)

1.40. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{3y}{4x} = 2, \\ \dfrac{8y}{x^2} - \dfrac{6x}{y} = 5. \end{cases}$$

(Билет 4, 2000)

1.41. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{|x^2-7x+6|-|x^2-x-2|} \geqslant 0.$$

(Билет 5, 2000)

1.42. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-6x+5|-|x^2-2x-3|}\leqslant 0.$$

(Билет 6, 2000)

1.43. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2-6x-5}}{|x^2+x-2|-|x^2+7x+6|}\geqslant 0.$$

(Билет 7, 2000)

1.44. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{|x^2+2x-3|-|x^2+6x+5|}\leqslant 0.$$

(Билет 8, 2000)

1.45. Решить неравенство

$$\frac{1}{2-\sqrt{x^2-x-2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}.$$

(Билет 1, 2001)

1.46. Решить неравенство

$$\frac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}.$$

(Билет 2, 2001)

1.47. Решить неравенство

$$\frac{1}{4-\sqrt{x^2-2x-8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+12}}.$$

(Билет 3, 2001)

1.48. Решить неравенство

$$\frac{1}{2-\sqrt{x^2+3x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+7}}.$$

(Билет 4, 2001)

1.49. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+4x-23}-\sqrt{x^2+2x-8}=1$$

(Билет 5, 2001)

1.50. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2-8x+25}-\sqrt{x^2-4x+13}=2.$$

(Билет 6, 2001)

1.51. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2-12x+46}-\sqrt{x^2-6x+22}=3.$$

(Билет 7, 2001)

1.52. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2-8x+49}-\sqrt{x^2-4x+21}=4.$$

(Билет 8, 2001)

1.53. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}x^2+9y^2-18y\leqslant 0,\\ 2x+3-2xy\leqslant 0.\end{cases}$$

(Билет 5, 2001)

1.54. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}y^2+3xy+1\leqslant 0,\\ 9x^2-12x-8y\leqslant 0.\end{cases}$$

(Билет 6, 2001)

1.55. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}4x^2+y^2+8x\leqslant 0,\\ xy+y+1\leqslant 0.\end{cases}$$

(Билет 7, 2001)

1.56. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}3x^2+2xy+3\leqslant 0,\\ y^2+6y+18x\leqslant 0.\end{cases}$$

(Билет 8, 2001)

1.57. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+5x+6}<1+\sqrt{x^2+x+1}.$$

(Билет 9, 2001)

1.58. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+4x+3}<1+\sqrt{x^2-2x+2}.$$

(Билет 10, 2001)

1.59. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-5x+6}<1+\sqrt{x^2-x+1}.$$

(Билет 11, 2001)

1.60. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+3}<1+\sqrt{x^2+2x+2}.$$

(Билет 12, 2001)

1.61. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}5x-6y+4z+xy=0,\\ 3x-5y+z-y^2=0,\\ x-4y-2z-yz=0.\end{cases}$$

(Билет 9, 2001)

1.62. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x-y-5z-2yz=0,\\ x-5y-z-2z^2=0,\\ x+9y-3z+2xz=0.\end{cases}$$

(Билет 10, 2001)

1.63. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x+y+2z-x^2=0,\\ 10x-3y-3z+xz=0,\\ 16x-y+z-xy=0.\end{cases}$$

(Билет 11, 2001)

1.64. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}6x-5y+9z-2y^2=0,\\ x-2y+4z-2xy=0,\\ 4x-y+z-2yz=0.\end{cases}$$

(Билет 12, 2001)

1.65. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y}=10,\\ \sqrt{x+y}+2x+y=16.\end{cases}$$

(Билет 1, 2002)

1.66. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1,\\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3.\end{cases}$$

(Билет 2, 2002)

1.67. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x-4y}-2\sqrt{3y+x}=1,\\ 7\sqrt{3y+x}+22y+5x=13.\end{cases}$$

(Билет 3, 2002)

1.68. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x-3y}-\sqrt{5x-y}=2,\\ 15\sqrt{5x-y}+22x+4y=15.\end{cases}$$

(Билет 4, 2002)

1.69. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}xy+\dfrac{y^4}{x}=\dfrac{x^2}{y}+y^2,\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}=0.\end{cases}$$

(Билет 5, 2002)

1.70. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}y+\dfrac{x^3}{y^3}=\dfrac{y^3}{x}+\dfrac{x^2}{y},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{y^3}{x^3}+\dfrac{10}{x^2}=0.\end{cases}$$

(Билет 6, 2002)

1.71. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+x^4y=\dfrac{1}{xy^2}+x^2,\\ \dfrac{1}{x}+x^2y^2+4y^2=0.\end{cases}$$

(Билет 7, 2002)

1.72. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{x^3y^3}=x^3y+\dfrac{1}{xy^2},\\ \dfrac{1}{x}+x^3y^3+10y^2=0.\end{cases}$$

(Билет 8, 2002)

1.73. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2+9x-162}{x-2}}>9-|x|.$$

(Билет 5, 2002)

1.74. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{500+30x-2x^2}{2x+5}} > 10-|x|.$$

(Билет 6, 2002)

1.75. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2+30x-675}{x-3}} > 15-|x|.$$

(Билет 7, 2002)

1.76. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{243+9x-2x^2}{2x+3}} > 9-|x|.$$

(Билет 8, 2002)

1.77. Решить систему уравнения

$$\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz+11=0, \\ x^3-y^3+z^3-xyz-21=0, \\ y^3+z^3-x^3-xyz-3=0. \end{cases}$$

(Билет 9, 2002)

1.78. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3-y^3-2z^3+xyz+5=0, \\ y^3+2z^3-x^3-2xyz-2=0, \\ x^3-y^3-z^3+xyz+4=0. \end{cases}$$

(Билет 10, 2002)

1.79. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+2y^3+z^3+2xyz+22=0, \\ 2x^3-2y^3-z^3+xyz+2=0, \\ y^3-x^3-z^3+xyz-13=0. \end{cases}$$

(Билет 11, 2002)

1.80. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^3-3y^3+z^3-xyz-3=0, \\ 3y^3-x^3-z^3-xyz+5=0, \\ x^3-y^3+z^3-xyz-2=0. \end{cases}$$

(Билет 12, 2002)

1.81. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2+6y=\frac{x}{y}-\sqrt{x-2y}, \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2. \end{cases}$$

(Билет 1, 2003)

1.82. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x-1=\frac{y}{x}+2\sqrt{x+y}, \\ \sqrt{y+\sqrt{x+y}}=y-3x-6. \end{cases}$$

(Билет 2, 2003)

1.83. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1-5y=\frac{x}{y}-6\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{x-\sqrt{x-y}}=x-5y-6. \end{cases}$$

(Билет 3, 2003)

1.84. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3+21x=\frac{y}{x}+4\sqrt{y-3x}, \\ \sqrt{y-\sqrt{y-3x}}=y+7x-2. \end{cases}$$

(Билет 4, 2003)

1.85. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}-4}<\frac{1}{2|x+2|-5}.$$

(Билет 5, 2003)

1.86. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}-4}<\frac{1}{2|x-3|-5}.$$

(Билет 6, 2003)

1.87. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-5}-4}<\frac{1}{2|x+6|-5}.$$

(Билет 7, 2003)

1.88. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-8}-4}<\frac{1}{2|x-5|-5}.$$

(Билет 8, 2003)

1.89. Решить неравенство

$$\sqrt{9-\sqrt{76-12x^3}} < 3-x.$$

(Билет 9, 2003)

1.90. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy^2+8zx^2-4yz^2=6xyz, \\ 8xz^2-4yx^2+2zy^2=6xyz, \\ 2xy-4xz+2yz=3. \end{cases}$$

(Билет 9, 2003)

1.91. Решить неравенство

$$\sqrt{16-\sqrt{132-16x^3}} < 4-x.$$

(Билет 10, 2003)

1.92. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4zx^2-yz^2+2xy^2=3xyz, \\ zy^2+2xz^2-4yx^2=3xyz, \\ 2xy-2xz+yz=3. \end{cases}$$

(Билет 10, 2003)

1.93. Решить неравенство

$$\sqrt{9-2\sqrt{19+81x^3}} < 3+3x.$$

(Билет 11, 2003)

1.94. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8zx^2-2xy^2+4yz^2=6xyz, \\ 4yx^2+2zy^2-8xz^2=6xyz, \\ 2xy+4xz-2yz=3. \end{cases}$$

(Билет 11, 2003)

1.95. Решить неравенство

$$\sqrt{4-\frac{\sqrt{33+32x^3}}{2}} < 2+x.$$

(Билет 12, 2003)

1.96. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2yz^2-4xy^2+zx^2=3xyz, \\ 2yx^2+4zy^2-xz^2=3xyz, \\ 2xy+xz-2yz=3. \end{cases}$$

(Билет 12, 2003)

1.97. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^5 + 4x^4 + 5y^2 = 0, \\ x^3 - \dfrac{y^3}{x^2} = xy - y^2. \end{cases}$$

(Билет 1, 2004)

1.98. Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$3xy + 16x + 13y + 61 = 0.$$

(Билет 1, 2004)

1.99. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^7 + y^6 - 6x^2 = 0, \\ y^5 + \dfrac{x^3}{y^3} = x^2 + xy^2. \end{cases}$$

(Билет 2, 2004)

1.100. Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0.$$

(Билет 2, 2004)

1.101. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^9 - x^8 - 2y^2 = 0, \\ x^7 + \dfrac{y^3}{x^4} = y^2 + yx^3. \end{cases}$$

(Билет 3, 2004)

1.102. Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$3xy + 19x + 10y + 55 = 0.$$

(Билет 3, 2004)

1.103. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^7 + 2y^6 + 3x^2 = 0, \\ y^4 - xy = \dfrac{x^3}{y^4} - \dfrac{x^2}{y}. \end{cases}$$

(Билет 4, 2004)

1.104. Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$-3xy + 10x - 16y + 45 = 0.$$

(Билет 4, 2004)

1.105. Решить неравенство

$$\frac{5}{6-3\sqrt{6-x-x^2}} - \frac{1}{x+1} > \frac{1}{1+|x+1|}.$$

(Билет 5, 2004)

1.106. Решить неравенство

$$\frac{1}{x-2} + \frac{5}{6-3\sqrt{4+3x-x^2}} > \frac{1}{1+|x-2|}.$$

(Билет 6, 2004)

1.107. Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{6-3\sqrt{6+x-x^2}} > \frac{1}{1+|x-1|}.$$

(Билет 7, 2004)

1.108. Решить неравенство

$$\frac{1}{x+1} + \frac{5}{6-3\sqrt{4-3x-x^2}} > \frac{1}{1+|x+1|}.$$

(Билет 8, 2004)

1.109. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2x-y)^2 = 4 + z^2, \\ (z-y)^2 = 2 + 4x^2, \\ (z+2x)^2 = 3 + y^2. \end{cases}$$

(Билет 9, 2004)

1.110. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (3y-x)^2 = 2 + z^2, \\ (3y+z)^2 = 3 + x^2, \\ (z-x)^2 = 4 + 9y^2. \end{cases}$$

(Билет 10, 2004)

1.111. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 3 + 4z^2, \\ (2z-y)^2 = 4 + x^2, \\ (2z-x)^2 = 2 + y^2. \end{cases}$$

(Билет 11, 2004)

1.112. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = 4 + z^2, \\ (z-2y)^2 = 3 + x^2, \\ (z+x)^2 = 2 + 4y^2. \end{cases}$$

(Билет 12, 2004)

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Решить уравнение

$$\sqrt{8\sin x+\frac{13}{3}}=2\cos x+2\operatorname{tg} x.$$

(Билет 1, 1991)

2.2. Решить уравнение

$$\sqrt{5\operatorname{tg} x+10}=\frac{5}{2}\sin x+\frac{1}{\cos x}.$$

(Билет 2, 1991)

2.3. Решить уравнение

$$\sqrt{7-4\sqrt{2}\sin x}=2\cos x-\sqrt{2}\operatorname{tg} x.$$

(Билет 3, 1991)

2.4. Решить уравнение

$$\sqrt{12-6\sqrt{2}\operatorname{tg} x}=3\sin x-\frac{\sqrt{2}}{\cos x}$$

(Билет 4, 1991)

2.5. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg} 3x=\arccos 8x.$$

(Билет 5, 1992)

2.6. Решить уравнение

$$2\arcsin 2x=\arccos 7x.$$

(Билет 6, 1992)

2.7. Решить уравнение

$$\arcsin 5x=\operatorname{arcctg} 6x.$$

(Билет 7, 1992)

2.8. Решить уравнение

$$2\arccos x=\arccos\frac{7}{3}x.$$

(Билет 8, 1992)

2.9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}10\cos 2x-2=7\cos x\cos 2y,\\ \sin x=\sqrt{\cos x}\sin y.\end{cases}$$

(Билет 9, 1992)

2.10. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{2\operatorname{tg} x-4\operatorname{ctg} x}=3\operatorname{tg} y,\\ \sqrt{2\sin 2x}=\frac{4}{3}\sin x\cos y.\end{cases}$$

(Билет 10, 1992)

2.11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}17\cos 2x-7=21\sin x\cos 2y,\\ \cos x=\sqrt{3\sin x}\cdot\cos y.\end{cases}$$

(Билет 11, 1992)

2.12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x}=4\operatorname{ctg} y,\\ \sqrt{(4/3)\sin 2x}=\cos x\cdot\sin y.\end{cases}$$

(Билет 12, 1992)

2.13. Решить уравнение

$$\sin 3x+|\sin x|=\sin 2x.$$

(Билет 1, 1993)

2.14. Решить уравнение

$$\cos 3x+|\cos x|=\sin 2x.$$

(Билет 2, 1993)

2.15. Решить уравнение

$$\sin 3x-|\sin x|=\sin 2x.$$

(Билет 3, 1993)

2.16. Решить уравнение

$$|\cos x|-\cos 3x=\sin 2x.$$

(Билет 4, 1993)

2.17. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x}{\sin x+\cos x}=\frac{\cos 6x}{\cos x-\sin x},$$

принадлежащие интервалу $(0;\frac{\pi}{2})$. (Билет 5, 1993)

2.18. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{\cos 6x}=\frac{\sqrt{3}\sin x+\cos x}{\sin 6x},$$

принадлежащие интервалу $(-\frac{\pi}{2};0)$. (Билет 6, 1993)

2.19. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x}{\sin x-\cos x}=\frac{\cos 6x}{\cos x+\sin x},$$

принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. (Билет 7, 1993)

2.20. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{\sin 6x}=\frac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{\cos 6x},$$

принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. (Билет 8, 1993)

2.21. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{7}{2}-3\sin^2 x}=\sin x+\cos x.$$

(Билет 9, 1993)

2.22. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{13}{3}+\cos 2x}+\operatorname{ctg} x=0.$$

(Билет 10, 1993)

2.23. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}+\cos^2 x}=\sin x-\cos x.$$

(Билет 11, 1993)

2.24. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{5}{3}-\cos 2x}+\operatorname{tg} x=0.$$

(Билет 12, 1993)

2.25. Решить уравнение

$$\frac{\cos 2x+\cos x}{\sin 2x-\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} 2x.$$

(Билет 1, 1994)

2.26. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}{3\sin x+\cos 2x}=\operatorname{ctg} 2x.$$

(Билет 2, 1994)

2.27. Решить уравнение

$$\frac{2\cos x+\sin^2 x}{\operatorname{ctg} x-\sin 2x}=\operatorname{tg} 2x.$$

(Билет 3, 1994)

2.28. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{\cos x + 3\cos 2x} = \operatorname{ctg} 2x.$$

(Билет 4, 1994)

2.29. Решить уравнение

$$\sqrt{5 - \cos 2x} = \cos x - 3\sin x.$$

(Билет 9, 1994)

2.30. Решить уравнение

$$\sqrt{17 - 7\sin 2x} = 3\cos x - 5\sin x.$$

(Билет 10, 1994)

2.31. Решить уравнение

$$\sqrt{5 + \cos 2x} = \sin x + 3\cos x.$$

(Билет 11, 1994)

2.32. Решить уравнение

$$\sqrt{17 + 7\sin 2x} = 3\sin x + 5\cos x.$$

(Билет 12, 1994)

2.33. Решить уравнение

$$\frac{2\sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = 1.$$

(Билет 5, 1995)

2.34. Решить уравнение

$$\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = \sqrt{3}.$$

(Билет 6, 1995)

2.35. Решить уравнение

$$\frac{2\cos 3x - \cos 5x}{|\cos x|} = 1.$$

(Билет 7, 1995)

2.36. Решить уравнение

$$\frac{(\sqrt{3}+1)\cos 3x - \cos 5x}{|\cos x|} = \sqrt{3}.$$

(Билет 8, 1995)

2.37. Найти наименьшее натуральное число n, при котором выполняется равенство

$$\sin(n^\circ + 80^\circ) + \sin(n^\circ - 40^\circ) + \sin(n^\circ + 70^\circ) - \cos 25^\circ = 0.$$

(Билет 9, 1995)

2.38. Найти наименьшее натуральное число n, при котором выполняется равенство

$$\cos(n^\circ + 20^\circ) - \cos(n^\circ + 80^\circ) - \sin(n^\circ + 80^\circ) + \sin 15^\circ = 0.$$

(Билет 10, 1995)

2.39. Найти наименьшее натуральное число n, при котором выполняется равенство

$$\sin(n^\circ + 100^\circ) + \sin(n^\circ - 20^\circ) + \sin(n^\circ + 50^\circ) + \cos 5^\circ = 0.$$

(Билет 11, 1995)

2.40. Найти наименьшее натуральное число n, при котором выполняется равенство

$$\cos(n^\circ - 50^\circ) - \cos(n^\circ + 10^\circ) - \sin(n^\circ + 130^\circ) - \sin 75^\circ = 0.$$

(Билет 12, 1995)

2.41. Решить уравнение

$$\sqrt{4 + 3\cos x - \cos 2x} = \sqrt{6}\sin x.$$

(Билет 1, 1996)

2.42. Решить уравнение

$$\sqrt{4\sin x + \cos 2x + 5} = 2\sqrt{2}\cos x.$$

(Билет 2, 1996)

2.43. Решить уравнение

$$\sqrt{7 - \cos x - 6\cos 2x} = 4\sin x.$$

(Билет 3, 1996)

2.44. Решить уравнение

$$\sqrt{5 - 2\sin x + 3\cos 2x} = 2\sqrt{3}\cos x.$$

(Билет 4, 1996)

2.45. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = -\sqrt{2}\cos y, \\ \cos 2y + 2\sin 2x + \frac{3}{4} = 2\sin^3 2x. \end{cases}$$

(Билет 5, 1996)

2.46. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |\sin 3x| = -\sqrt{2}\sin y, \\ \cos 2y + 2\cos 2x\sin^2 2x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

(Билет 6, 1996)

2.47. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sin y - \cos y, \\ \sin 2y + 2\sin 2x = \frac{3}{4} + 2\sin^3 2x. \end{cases}$$

(Билет 7, 1996)

2.48. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |\cos 3x| = \sin y + \cos y, \\ 2\sin^2 2x \cos 2x + \frac{3}{4} = -\sin 2y. \end{cases}$$

(Билет 8, 1996)

2.49. Дана функция $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

Найти:

1) корни уравнения $f(x) = \frac{10}{7}$;
2) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

(Билет 9, 1996)

2.50. Дана функция $f(x) = \frac{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}{2\cos^4 x + \sin^2 x}$.

Найти:

1) корни уравнения $f(x) = \frac{15}{7}$;
2) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

(Билет 10, 1996)

2.51. Дана функция $f(x) = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Найти:

1) корни уравнения $f(x) = \frac{7}{10}$;
2) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

(Билет 11, 1996)

2.52. Дана функция $f(x) = \frac{2\cos^4 x + \sin^2 x}{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}$.

Найти:

1) корни уравнения $f(x) = \frac{7}{15}$;
2) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

(Билет 12, 1996)

2.53. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x \sin 3x.$$

(Билет 1, 1997)

2.54. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} = 2\cos 2x.$$

(Билет 2, 1997)

2.55. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\sin 3x} + \frac{\sin 5x}{\sin x} = 8\cos x \cos 3x.$$

(Билет 3, 1997)

2.56. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\cos 2x} = \frac{2}{\cos 3x}.$$

(Билет 4, 1997)

2.57. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cos x \cos y + 7\sin x \sin y = 4, \\ 5\cos x \cos y - 3\sin x \sin y = 3. \end{cases}$$

(Билет 9, 1997)

2.58. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\sin x \cos y + 2\cos x \sin y = -3, \\ 5\sin x \cos y - 3\cos x \sin y = 1. \end{cases}$$

(Билет 10, 1997)

2.59. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9\cos x \cos y - 5\sin x \sin y = -6, \\ 7\cos x \cos y - 3\sin x \sin y = -4. \end{cases}$$

(Билет 11, 1997)

2.60. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sin x \cos y - 7\cos x \sin y = 6, \\ 7\sin x \cos y + 5\cos x \sin y = -2. \end{cases}$$

(Билет 12, 1997)

2.61. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{|\sin x|} + \frac{3\sin x}{\sin 3x} = -2.$$

(Билет 1, 1998)

2.62. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{|\cos x|} + \frac{2\cos x}{\cos 3x} = -1.$$

(Билет 2, 1998)

2.63. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{3|\sin x|}{\sin 3x}=-2.$$

(Билет 3, 1998)

2.64. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{2|\cos x|}{\cos 3x}=-1.$$

(Билет 4, 1998)

2.65. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5+3\cos 4x}{8}} > -\sin x.$$

(Билет 5, 1998)

2.66. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7-\cos 4x}{2}} > -2\cos x.$$

(Билет 6, 1998)

2.67. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7-\cos 4x}{2}} > -2\sin x.$$

(Билет 7, 1998)

2.68. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5+3\cos 4x}{8}} > -\cos x.$$

(Билет 8, 1998)

2.69. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x-\sin x}{\cos 5x-\sin 3x}=1.$$

(Билет 1, 1999)

2.70. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x-\cos x}{\cos 3x-\sin 5x}=1.$$

(Билет 2, 1999)

2.71. Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x+\sin 3x}{\cos 3x+\sin x}=1.$$

(Билет 3, 1999)

2.72. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x+\sin 5x}{\cos x+\sin 3x}=-1.$$

(Билет 4, 1999)

2.73. Решить уравнение

$$2+\sqrt{3}\sin 2x-|\cos 2x|=4\sin^2\frac{x}{2}.$$

(Билет 5, 1999)

2.74. Решить уравнение

$$2+\sqrt{3}\cos x+|\sin x|=4\sin^2 x.$$

(Билет 6, 1999)

2.75. Решить уравнение

$$2+\sqrt{3}\sin x+|\cos x|=4\cos^2 x.$$

(Билет 7, 1999)

2.76. Решить уравнение

$$\sqrt{2}+\cos x-|\sin x|=2\sqrt{2}\sin^2 x.$$

(Билет 8, 1999)

2.77. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x}=16\cos 4x(1+2\cos 4x)+\frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}.$$

(Билет 1, 2000)

2.78. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 9x}{\sin^2 x}=16\operatorname{ctg} 2x\sin 10x+\frac{\cos^2 9x}{\cos^2 x}.$$

(Билет 2, 2000)

2.79. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 5x}{\sin^2 x}=24\cos 2x+\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}.$$

(Билет 3, 2000)

2.80. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}=8\cos 4x+\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}.$$

(Билет 4, 2000)

2.81. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos 2x\cos 3x}+\frac{\sin x}{\cos 3x\cos 4x}=\sin 4x-\operatorname{tg} 2x.$$

(Билет 5, 2000)

2.82. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x\cos 5x}+\frac{\sin 3x}{\cos 5x\cos 8x}=\sin 8x-\operatorname{tg} 2x.$$

(Билет 6, 2000)

2.83. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos 6x \cos 7x} + \frac{\sin x}{\cos 7x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 6x.$$

(Билет 7, 2000)

2.84. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos 4x \cos 5x} + \frac{\sin x}{\cos 5x \cos 6x} = \sin 6x - \operatorname{tg} 4x.$$

(Билет 8, 2000)

2.85. Решить уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\sin x} + \sin^2 x \cos 3x = 6 \cos 2x \cos^2 x.$$

(Билет 1, 2001)

2.86. Решить уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x.$$

(Билет 2, 2001)

2.87. Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \sin 3x = 6 \cos 2x \sin^2 x.$$

(Билет 3, 2001)

2.88. Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \sin 3x + 6 \cos 2x \sin^2 x = 0.$$

(Билет 4, 2001)

2.89. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 4|\sin x|.$$

(Билет 5, 2001)

2.90. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

(Билет 6, 2001)

2.91. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = 4|\cos x|.$$

(Билет 7, 2001)

2.92. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

(Билет 8, 2001)

2.93. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x+\cos x}{\sin 4x+\sin 3x-\sin 2x-\sin x}=\frac{\sqrt{2}\,|1-2\sin^2 x|}{\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.$$

(Билет 9, 2001)

2.94. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x+\sin 3x-\sin 2x-\sin x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}=\frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2}\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

(Билет 10, 2001)

2.95. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x-\cos 3x+\cos 2x-\cos x}{\sin 4x-\sin 3x-\sin 2x+\sin x}=\frac{\sqrt{2}\,|2\cos^2 x-1|}{\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

(Билет 11, 2001)

2.96. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x-\sin 3x-\sin 2x+\sin x}{\cos 4x-\cos 3x+\cos 2x-\cos x}=\frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2}\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

(Билет 12, 2001)

2.97. Решить уравнение

$$\frac{3+\cos 4x-8\cos^4 x}{4(\cos x+\sin x)}=\frac{1}{\sin x}.$$

(Билет 1, 2002)

2.98. Решить уравнение

$$\frac{3+\cos 4x-8\sin^4 x}{4(\sin x+\cos x)}=\frac{1}{\cos x}.$$

(Билет 2, 2002)

2.99. Решить уравнение

$$\frac{3+4\cos 2x-8\cos^4 x}{\sin 2x-\cos 2x}=\frac{1}{\sin 2x}.$$

(Билет 3, 2002)

2.100. Решить уравнение

$$\frac{3-4\cos 2x-8\sin^4 x}{\sin 2x+\cos 2x}=\frac{1}{\sin 2x}.$$

(Билет 4, 2002)

2.101. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x}+\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$

(Билет 5, 2002)

2.102. Решить уравнение

$$\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{2x}+\arccos 2x=\frac{\pi}{2}.$$

(Билет 6, 2002)

2.103. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}\frac{1-x}{3x}+\arcsin 3x=\frac{\pi}{2}.$$

(Билет 7, 2002)

2.104. Решить уравнение

$$\operatorname{arcctg}\frac{3x-1}{x}+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

(Билет 8, 2002)

2.105. Решить уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 4x=1-\frac{\cos 2x}{\cos 3x}.$$

(Билет 9, 2002)

2.106. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=1-\frac{\cos 3x}{\cos 2x}.$$

(Билет 10, 2002)

2.107. Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x=1+\operatorname{ctg} 3x.$$

(Билет 11, 2002)

2.108. Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x=1+\frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

(Билет 12, 2002)

2.109. Решить уравнение

$$\sin x+|\cos x|+\sin 4x=\cos 2x.$$

(Билет 1, 2003)

2.110. Решить уравнение

$$\cos x+|\sin x|+\cos 2x=\sin 4x.$$

(Билет 2, 2003)

2.111. Решить уравнение

$$\sin x + |\cos x| = \sin 4x + \cos 2x.$$

(Билет 3, 2003)

2.112. Решить уравнение

$$\cos x + |\sin x| + \sin 4x = -\cos 2x.$$

(Билет 4, 2003)

2.113. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}\left(1 - \sin^2 x \cos 2x - 2\sin^2 x\right) = 1.$$

(Билет 5, 2003)

2.114. Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x}{\cos x}\left(-1 - \sin^2 x \cos 2x + 2\cos^2 x\right) = 1.$$

(Билет 6, 2003)

2.115. Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x}{\cos x}\left(1 - 2\sin^2 x - \sin^2 x \cos 2x\right) = 1.$$

(Билет 7, 2003)

2.116. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}\left(2\cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x - 1\right) = 1.$$

(Билет 8, 2003)

2.117. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x \cos 5x + |\sin 5x \cos 3x|}{\sin 2x} = 2\cos 2x.$$

(Билет 9, 2003)

2.118. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x \cos 5x + |\sin 5x \sin 3x|}{\sin 2x} = 2\cos 2x.$$

(Билет 10, 2003)

2.119. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x \sin 5x + |\cos 5x \sin 3x|}{\cos 2x} = 2\sin 2x.$$

(Билет 11, 2003)

2.120. Решить уравнение

$$\frac{|\cos 5x \cos 3x| - \sin 3x \sin 5x}{\cos 2x} = 2\sin 2x.$$

(Билет 12, 2003)

2.121. Решить уравнение

$$\sin 3x + \cos 2x = \cos 4x - 3|\sin x|.$$

(Билет 1, 2004)

2.122. Решить уравнение

$$\cos 3x + \cos 2x = 3|\cos x| - \cos 4x.$$

(Билет 2, 2004)

2.123. Решить уравнение

$$\sin 3x - \cos 2x = 3|\sin x| - \cos 4x.$$

(Билет 3, 2004)

2.124. Решить уравнение

$$\cos 3x - \cos 2x = \cos 4x - 3|\cos x|.$$

(Билет 4, 2004)

2.125. Решить уравнение

$$\sin x\sqrt{1 - \cos x - 2\sin x} = \sin x + \cos x.$$

(Билет 5, 2004)

2.126. Решить уравнение

$$\cos x\sqrt{1 + \sin x - 2\cos x} = \cos x - \sin x.$$

(Билет 6, 2004)

2.127. Решить уравнение

$$\sin x\sqrt{1 + \cos x - 2\sin x} = \sin x - \cos x.$$

(Билет 7, 2004)

2.128. Решить уравнение

$$\cos x\sqrt{1 + \sin x + 2\cos x} = \sin x + \cos x.$$

(Билет 8, 2004)

2.129. Решить уравнение

$$\frac{2\sin 3x}{\sin x} = \frac{\cos 6x}{\cos 2x}.$$

(Билет 9, 2004)

2.130. Решить уравнение

$$\frac{\sin 6x}{|\sin 4x|} = \frac{\cos 3x}{\cos x}.$$

(Билет 10, 2004)

2.131. Решить уравнение

$$\frac{2\sin 3x}{|\sin x|}=\frac{\cos 6x}{\cos 2x}.$$

(Билет 11, 2004)

2.132. Решить уравнение

$$\frac{\sin 6x}{\sin 4x}=\frac{\cos 3x}{|\cos x|}.$$

(Билет 12, 2004)

3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

3.1. Решить уравнение

$$\log_7(3-2x)\cdot\log_x(3-2x)=\log_7(3-2x)+\log_7 x^2.$$

(Билет 5, 1991)

3.2. Решить уравнение

$$\log_3 3x+\log_3(4x+1)=\log_{4x^2+x}9.$$

(Билет 6, 1991)

3.3. Решить уравнение

$$2\log_5(4-x)\cdot\log_{2x}(4-x)=3\log_5(4-x)-\log_5 2x.$$

(Билет 7, 1991)

3.4. Решить уравнение

$$\log_2\frac{x}{2}+\log_2(21x-2)=2\log_{21x^2-2x}8.$$

(Билет 8, 1991)

3.5. Решить неравенство

$$x\cdot 3^{\log_{1/9}(16x^4-8x^2+1)}<\frac{1}{3}.$$

(Билет 9, 1991)

3.6. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9\left(\frac{1}{x^2}-6+9x^2\right)}\geqslant\frac{1}{x}.$$

(Билет 10, 1991)

3.7. Решить неравенство

$$2^{\log_4(25x^4-10x^2+1)}>4x.$$

(Билет 11, 1991)

3.8. Решить неравенство

$$x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4\left(x^2-4+\frac{4}{x^2}\right)}\leqslant 2.$$

(Билет 12, 1991)

3.9. Решить уравнение

$$\log_4\left(\cos 2x-\frac{1}{10}\right)+1=\log_2\operatorname{tg}x.$$

(Билет 1, 1992)

3.10. Решить уравнение

$$\log_{125}(\sin 2x - \sin x) + \frac{1}{3} = \log_5(-2\sin x).$$

(Билет 2, 1992)

3.11. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{6}} \operatorname{ctg} x = 1 + \log_6\left(\frac{3}{2} - \cos 2x\right).$$

(Билет 3, 1992)

3.12. Решить уравнение

$$\log_{27}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x).$$

(Билет 4, 1992)

3.13. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\log_2(8x^2 + 8x)} = \log_{\sqrt{2}}(x^2 + x),$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x < \operatorname{tg} 3x$. (Билет 5, 1992)

3.14. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\log_{4x^2-x} 5} \cdot \log_5\left(\frac{25}{4x^2 - x}\right) = 1,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x > \operatorname{ctg} 2x$. (Билет 6, 1992)

3.15. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{7 - \log_{\sqrt{3}}(3x^2 - 24x)} = \log_9(x^2 - 8x),$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x < \operatorname{tg} 2x$. (Билет 7, 1992)

3.16. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\log_{1/6}\left(x^2 + \frac{1}{6}x\right)} \cdot \log_{36x^2+6x} 6 = 1,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x > \operatorname{tg} 6x$. (Билет 8, 1992)

3.17. Решить неравенство

$$\frac{1}{x}\log_7\left(\frac{9}{2} - 2\cdot 7^{-x}\right) > 1.$$

(Билет 9, 1992)

3.18. Решить неравенство

$$x\log_{1/2}\left(\frac{5}{2} - 2^{1/x}\right) > 1.$$

(Билет 10, 1992)

3.19. Решить неравенство

$$\frac{1}{x}\log_5\left(\frac{10}{3}-5^{-x}\right)>1.$$

(Билет 11, 1992)

3.20. Решить неравенство

$$x\log_{1/3}\left(\frac{28}{3}-3\cdot 3^{1/x}\right)>1.$$

(Билет 12, 1992)

3.21. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_5\left(31-6\cdot 5^{2-x^2}\right)}>x.$$

(Билет 1, 1993)

3.22. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(3-\sqrt{2^{-x}-1}\right)>x.$$

(Билет 2, 1993)

3.23. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_4\left(21-5\cdot 4^{2-x^2}\right)}>x.$$

(Билет 3, 1993)

3.24. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(4-\sqrt{3^{-x}-2}\right)>x.$$

(Билет 4, 1993)

3.25. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\log_4(1+6x)+\left|\log_{\frac{1}{8}}(1+7x)\right|}.$$

(Билет 5, 1993)

3.26. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\left|\log_{27}\left(1+\tfrac{7}{2}x\right)\right|-\log_{\frac{1}{3}}(1+2x)}.$$

(Билет 6, 1993)

3.27. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\left|\log_{8}\left(1+\tfrac{7}{2}x\right)\right|-\log_{\frac{1}{4}}(1+3x)}.$$

(Билет 7, 1993)

3.28. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\log_4(1+3x)+\left|\log_{\frac{1}{64}}\left(1+\frac{21}{4}x\right)\right|}.$$

(Билет 8, 1993)

3.29. Решить неравенство

$$\sqrt{32^x+4}-\sqrt{|32^x-7|}<1.$$

(Билет 1, 1994)

3.30. Решить неравенство

$$3^x(\sqrt{9^{1-x}-1}+1)<3|3^x-1|.$$

(Билет 2, 1994)

3.31. Решить неравенство

$$\sqrt{13^x+3}-\sqrt{|13^x-4|}<1.$$

(Билет 3, 1994)

3.32. Решить неравенство

$$4^x(\sqrt{16^{1-x}-1}+2)<4|4^x-1|.$$

(Билет 4, 1994)

3.33. Решить неравенство

$$4\log_{2|x|+1}\sqrt{5x+3}-\log_{\sqrt{5x+3}}(2|x|+1)>0.$$

(Билет 5, 1994)

3.34. Решить неравенство

$$\log_{2|x|+1}(3x+2)-\log_{3x+2}(2|x|+1)>0.$$

(Билет 6, 1994)

3.35. Решить неравенство

$$4\log_{3|x|+1}\sqrt{4x+3}-\log_{\sqrt{4x+3}}(3|x|+1)>0.$$

(Билет 7, 1994)

3.36. Решить неравенство

$$\log_{2|x|+1}(7x+4)-\log_{7x+4}(2|x|+1)>0.$$

(Билет 8, 1994)

3.37. Решить неравенство

$$\left(\log_{|2x+1/2|}\left(\frac{1}{4}-x\right)-1\right)\log_9\left(\frac{1}{4}-x\right)>\log_3\frac{\frac{1}{4}-x}{\left|2x+\frac{1}{2}\right|}.$$

(Билет 9, 1994)

3.38. Решить неравенство

$$\log_8\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)>\log_2\frac{\frac{1}{3}-x}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

(Билет 10, 1994)

3.39. Решить неравенство

$$\left(\log_{|x+1/2|}\left(\frac{1}{4}-x\right)-1\right)\log_{16}\left(\frac{1}{4}-x\right)>\log_4\frac{\frac{1}{4}-x}{\left|x+\frac{1}{2}\right|}.$$

(Билет 11, 1994)

3.40. Решить неравенство

$$\log_{27}\left(\frac{5}{3}-x\right)\cdot\log_{\left|x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{5}{3}-x\right)>\log_3\frac{\frac{5}{3}-x}{\sqrt[3]{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

(Билет 12, 1994)

3.41. Решить уравнение

$$\log_3(\sin 3x-\sin x)=2\log_9(17\sin 2x)-1.$$

(Билет 1, 1995)

3.42. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{7}}(\sin x-\cos x)+1=\log_7(7+3\cos 4x).$$

(Билет 2, 1995)

3.43. Решить уравнение

$$\log_6(\cos x+\cos 3x)=2\log_{36}(\sin 2x)-1.$$

(Билет 3, 1995)

3.44. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{11}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\log_{11}(6+\cos 4x)-1.$$

(Билет 4, 1995)

3.45. Решить неравенство

$$\log_{1+\frac{6}{25}x}x-2\log_x\left(1+\frac{6}{25}x\right)>1.$$

(Билет 5, 1995)

3.46. Решить неравенство

$$\log_x\frac{x+1}{12x}>2\log_{\frac{x+1}{12}}x.$$

(Билет 6, 1995)

3.47. Решить неравенство

$$\log_{6x+1}(25x) - 2\log_{25x}(6x+1) > 1.$$

(Билет 7, 1995)

3.48. Решить неравенство

$$\log_{6x-1}\frac{x}{6x-1} > 2\log_x(6x-1).$$

(Билет 8, 1995)

3.49. Решить неравенство

$$5 - 3|3^x - 1| < \sqrt{10 - 3^{x+1}}.$$

(Билет 9, 1995)

3.50. Решить неравенство

$$2|2^x - 4| - 5 > \sqrt{2^{x+1} - 1}.$$

(Билет 10, 1995)

3.51. Решить неравенство

$$7 - 2|2^x - 2| < \sqrt{17 - 2^{x+1}}.$$

(Билет 11, 1995)

3.52. Решить неравенство

$$3|3^x - 5| - 7 > \sqrt{3^{x+1} - 2}.$$

(Билет 12, 1995)

3.53. Решить неравенство

$$\log_{|x+2|}(4^{-x} - 1) < \log_{|x+2|}(2^{-x} + 1) + \log_{|x+2|}(2^{-x-1} + 1).$$

(Билет 1, 1996)

3.54. Решить неравенство

$$\log_{|x-2|}(9^x - 4^x) < \log_{|x-2|}(3^x + 2^x) + \log_{|x-2|}(3^{x-2} + 2^x).$$

(Билет 2, 1996)

3.55. Решить неравенство

$$\log_{|2x+2|}(1 - 9^x) < \log_{|2x+2|}(1 + 3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9} + 3^{x-1}\right).$$

(Билет 3, 1996)

3.56. Решить неравенство

$$\log_{|3x-3|}(25^x - 9^x) < \log_{|3x-3|}(5^x + 3^x) + \log_{|3x-3|}(5^{x-1} + 3^{x-1}).$$

(Билет 4, 1996)

3.57. Решить уравнение

$$\log_{49}(x-1)^2 + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}}\left(\frac{2x+9}{7x+9}\right) = 0.$$

(Билет 5, 1996)

3.58. Решить уравнение

$$\log_{9}(x-4)^2 + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{2x+5}{20-x}\right) = 0.$$

(Билет 6, 1996)

3.59. Решить уравнение

$$\log_{4}(x-8)^2 + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2x-2}{7x-40}\right) = 0.$$

(Билет 7, 1996)

3.60. Решить уравнение

$$\log_{25}(x-2)^2 + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{2x+9}{18-x}\right) = 0.$$

(Билет 8, 1996)

3.61. Выразить $\log_{600} 900$ через a и b, где $a = \log_5 2$ и $b = \log_2 3$.
(Билет 9, 1996)

3.62. Выразить $\log_{140} 350$ через a и b, где $a = \log_7 5$ и $b = \log_5 2$.
(Билет 10, 1996)

3.63. Выразить $\log_{300} 120$ через a и b, где $a = \log_2 3$ и $b = \log_3 5$.
(Билет 11, 1996)

3.64. Выразить $\log_{490} 700$ через a и b, где $a = \log_2 7$ и $b = \log_7 5$.
(Билет 12, 1996)

3.65. Решить неравенство

$$\log_{|2x+1|} x^2 \geqslant 2.$$

(Билет 1, 1997)

3.66. Решить неравенство

$$\log_{x^2} |3x+1| < \frac{1}{2}.$$

(Билет 2, 1997)

3.67. Решить неравенство

$$\log_{|3x+2|} x^2 \geqslant 2.$$

(Билет 3, 1997)

3.68. Решить неравенство

$$\log_{x^2} |5x+2| < \frac{1}{2}.$$

(Билет 4, 1997)

3.69. Решить уравнение

$$\log_3(6\sin x+4)\log_5(6\sin x+4)=\log_3(6\sin x+4)+\log_5(6\sin x+4).$$

(Билет 5, 1997)

3.70. Решить уравнение

$$\log_2(4\cos x+3)\log_6(4\cos x+3)=\log_2(4\cos x+3)+\log_6(4\cos x+3).$$

(Билет 6, 1997)

3.71. Решить уравнение

$$\log_3(5\sin x+6)\log_7(5\sin x+6)=\log_3(5\sin x+6)+\log_7(5\sin x+6).$$

(Билет 7, 1997)

3.72. Решить уравнение

$$\log_5(7\cos x+8)\log_9(7\cos x+8)=\log_5(7\cos x+8)+\log_9(7\cos x+8).$$

(Билет 8, 1997)

3.73. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2(x^2y+2xy^2)-\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=4,\\ \log_5\left|\frac{xy}{6}\right|=0.\end{cases}$$

(Билет 5, 1998)

3.74. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_3\left(\frac{x^2}{y}+x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{y^2}{x}+y\right)=2,\\ \log_2|x+y|=1.\end{cases}$$

(Билет 6, 1998)

3.75. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=3,\\ \log_{\frac{1}{5}}\left|\frac{xy}{6}\right|=0.\end{cases}$$

(Билет 7, 1998)

3.76. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 \left(\frac{x^2}{y} - x\right) + \log_{\frac{1}{3}} \left(y - \frac{y^2}{x}\right) = 2, \\ \log_2 |x - y| = 1. \end{cases}$$

(Билет 8, 1998)

3.77. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x^2 - |x| - 12}{x + 3} > 0.$$

(Билет 1, 1999)

3.78. Решить неравенство

$$\log_7 \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + |x| - 30}{x + 6} < 0.$$

(Билет 2, 1999)

3.79. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_4 \frac{x^2 + |x + 1| - 13}{x + 4} > 0.$$

(Билет 3, 1999)

3.80. Решить неравенство

$$\log_8 \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 - |x + 1| - 55}{x + 7} < 0.$$

(Билет 4, 1999)

3.81. Найти решения (x, y) системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3 (5y - x - 2) - \log_9 (x - y)^2 = 1, \\ \log_3 (1 - \frac{2}{y} - 4x) - \log_9 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x - y < 0$. (Билет 5, 1999)

3.82. Найти решения (x, y) системы уравнений

$$\begin{cases} \log_2 (3y - 3x + 1) - \log_4 (x - 3y)^2 = 1, \\ \log_2 (1 - \frac{1}{y} - 3x) - \log_4 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x - 3y < 0$. (Билет 6, 1999)

3.83. Найти решения (x, y) системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3 (10y - x - 2) - \log_9 (x - 2y)^2 = 1, \\ \log_3 (1 - \frac{1}{y} - 4x) - \log_9 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x - 2y < 0$. (Билет 7, 1999)

3.84. Найти решения (x, y) системы уравнений

$$\begin{cases} \log_2 (y - 3x + 1) - \log_4 (x - y)^2 = 1, \\ \log_2 \left(1 - \frac{3}{y} - 3x\right) - \log_4 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x - y < 0$. (Билет 8, 1999)

3.85. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_2 2x| - 2} \leqslant \frac{1}{|\log_4 x^2| - 1}.$$

(Билет 1, 2000)

3.86. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_2 (x/2)| - 3} \leqslant \frac{1}{|\log_8 x^3| - 2}.$$

(Билет 2, 2000)

3.87. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_3 9x| - 3} \leqslant \frac{1}{|\log_9 x^2| - 1}.$$

(Билет 3, 2000)

3.88. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_{27} x^3| - 2} \leqslant \frac{1}{|\log_3 (x/3)| - 1}.$$

(Билет 4, 2000)

3.89. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \log_3^2 (x + 2y) = \log_{\frac{1}{3}} (x + 2y) \log_{\frac{1}{3}} (x - y) + \log_3^2 (x - y), \\ x^2 + xy - 2y^2 = 9. \end{cases}$$

(Билет 5, 2000)

3.90. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2^2 (x + y) + \log_{\frac{1}{2}} (x + y) \log_{\frac{1}{2}} (x - 2y) = 2 \log_2^2 (x - 2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

(Билет 6, 2000)

3.91. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3^2 (x + 2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x + 2y) \log_{\frac{1}{3}} (x - y) = 2 \log_3^2 (x - y), \\ x^2 + xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

(Билет 7, 2000)

3.92. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_2^2(x+y) = \log_{\frac{1}{2}}(x+y)\log_{\frac{1}{2}}(x-2y) + \log_2^2(x-2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 9. \end{cases}$$

(Билет 8, 2000)

3.93. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x+y+1} + 7\cdot 3^{y-2} = 8, \\ \sqrt{x+y^2} = x+y. \end{cases}$$

(Билет 1, 2001)

3.94. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+y+1} + 7\cdot 2^{y-5} = 4, \\ \sqrt{2x+y^2} = x+y. \end{cases}$$

(Билет 2, 2001)

3.95. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{x+y+1} + 16\cdot 5^{y-2} = 10, \\ \sqrt{x+y^2} = x+y. \end{cases}$$

(Билет 3, 2001)

3.96. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x+y+1} + 16\cdot 3^{y-3} = 10, \\ \sqrt{2x+y^2} = x+y. \end{cases}$$

(Билет 4, 2001)

3.97. Решить неравенство

$$\log_{(2x+9)}(24+2x-x^2) + \log_{\sqrt{24+2x-x^2}}(2x+9) \leqslant 3.$$

(Билет 5, 2001)

3.98. Решить неравенство

$$\log_{(20-2x)}(99-2x-x^2) + \log_{\sqrt{99-2x-x^2}}(20-2x) \leqslant 3.$$

(Билет 6, 2001)

3.99. Решить неравенство

$$\log_{(x+3)}(6+x-x^2) + \log_{\sqrt{6+x-x^2}}(x+3) \leqslant 3.$$

(Билет 7, 2001)

3.100. Решить неравенство

$$\log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4}-x-x^2\right) + \log_{\sqrt{\frac{99}{4}-x-x^2}}\left(\frac{13}{2}-x\right) \leqslant 3.$$

(Билет 8, 2001)

3.101. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{x-1}}\left(\frac{x-8}{x^2-2x-3}\right)+2\leqslant 0.$$

(Билет 1, 2002)

3.102. Решить неравенство

$$\log_{(1-x)^3}\left(\frac{x+6}{3+2x-x^2}\right)+\frac{1}{3}\leqslant 0.$$

(Билет 2, 2002)

3.103. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt[3]{x-3}}\left(\frac{x-10}{x^2-6x+5}\right)+3\leqslant 0.$$

(Билет 3, 2002)

3.104. Решить неравенство

$$\log_{(x+1)^5}\left(\frac{x-6}{x^2+2x-3}\right)+\frac{1}{5}\leqslant 0.$$

(Билет 4, 2002)

3.105. Решить неравенство

$$2\log_{2x-12}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}\right)<1.$$

(Билет 9, 2002)

3.106. Решить неравенство

$$2\log_{2x-8}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}\right)<1.$$

(Билет 10, 2002)

3.107. Решить неравенство

$$2\log_{2x-10}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}\right)<1.$$

(Билет 11, 2002)

3.108. Решить неравенство

$$2\log_{4x-16}\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{11-2x}\right)<1.$$

(Билет 12, 2002)

3.109. Решить неравенство

$$\sqrt{3\lg^2 x^2+\lg^2(x+2)}>\lg x^2+\lg(x+2).$$

(Билет 1, 2003)

3.110. Решить неравенство

$$\sqrt{3\ln^2(x-2)^2+\ln^2 x}>\ln(x-2)^2+\ln x.$$

(Билет 2, 2003)

3.111. Решить неравенство

$$\sqrt{3\lg^2 x^2 + \lg^2(2-x)} > \lg x^2 + \lg(2-x).$$

(Билет 3, 2003)

3.112. Решить неравенство

$$\sqrt{3\ln^2(x-1)^2 + \ln^2(x+1)} > \ln(x-1)^2 + \ln(x+1).$$

(Билет 4, 2003)

3.113. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\log_5(5x-3y-1)}{\log_5(2y-x+3)} = \dfrac{\log_2(5+4y-3x)-1}{\log_2(3x-y+1)}, \\ 2x^2 + y^2 = 3xy + x + 1. \end{cases}$$

(Билет 5, 2003)

3.114. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x+2y-5)}{\log_2(3x-2y+1)} = \dfrac{\log_3(2x-y)-1}{\log_3(2x+y-4)}, \\ y^2 + xy + 1 = 2x^2 + 2y + x. \end{cases}$$

(Билет 6, 2003)

3.115. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(4-3x-2y)-1}{\log_2(x+3y+1)} = \dfrac{\log_7(3x+5y-1)}{\log_7(3-y-2x)}, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = y + 1. \end{cases}$$

(Билет 7, 2003)

3.116. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\log_3(2-3x-4y)-1}{\log_3(x-2y-4)} = \dfrac{\log_5(2x-y-5)}{\log_5(1-2x-3y)}, \\ 2y^2 + xy + 2x = x^2 + y + 1. \end{cases}$$

(Билет 8, 2003)

3.117. Решить неравенство

$$\frac{\log_{x^2} 9}{\sqrt{\frac{1}{2} + \log_{x^2}(x+1)} - \sqrt{\frac{3}{2}}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\log_3(x+1) - \log_9 x^4}.$$

(Билет 1, 2004)

3.118. Решить неравенство

$$\frac{\log_{x^2} 4}{\sqrt{\frac{1}{6} + \log_{x^4}(1-x)} - \sqrt{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{\sqrt{6}}{\log_2(1-x) - \log_4 x^4}.$$

(Билет 2, 2004)

3.119. Решить неравенство

$$\frac{\log_{x^2}16}{\sqrt{\frac{1}{4}+\log_{x^4}(x+1)-\frac{\sqrt{3}}{2}}}\geqslant\frac{2}{\log_4(x+1)-\log_{16}x^4}.$$

(Билет 3, 2004)

3.120. Решить неравенство

$$\frac{\log_{x^2}25}{\sqrt{\frac{1}{8}+\log_{x^4}(1-x)-\sqrt{\frac{3}{8}}}}\geqslant\frac{\sqrt{8}}{\log_5(1-x)-\log_{25}x^4}.$$

(Билет 4, 2004)

3.121. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x-2)(x+3)=y(y-5),\\ \log_x(2-y)=\frac{x}{y^2}.\end{cases}$$

(Билет 5, 2004)

3.122. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x-4)(x+1)=y(y+5),\\ \log_{x-2}(2+y)=\frac{x-2}{y^2}.\end{cases}$$

(Билет 6, 2004)

3.123. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x-3)(x+4)=y(y-7),\\ \log_{x-1}(2-y)=\frac{x-1}{y^2}.\end{cases}$$

(Билет 7, 2004)

3.124. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x-1)(x+5)=y(y+6),\\ \log_{x+1}(2+y)=\frac{x+1}{y^2}.\end{cases}$$

(Билет 8, 2004)

3.125. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\log_8\frac{x^2-2|x|}{|x|-3}\geqslant 0.$$

(Билет 9, 2004)

3.126. Решить неравенство

$$\log_5\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-4|x|}{|x|-7}\leqslant 0.$$

(Билет 10, 2004)

3.127. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_8 \frac{1-2|x|}{|x|-3x^2} \geqslant 0.$$

(Билет 11, 2004)

3.128. Решить неравенство

$$\log_7 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-4|x|}{|x|-7x^2} \leqslant 0.$$

(Билет 12, 2004)

4. ПЛАНИМЕТРИЯ

4.1. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Через точку M, лежащую на стороне AB, проведена касательная к окружности, пересекающая прямую AC в точке N. Найти боковую сторону треугольника ABC, если $AC = CN = a$, $MB = \frac{1}{8} AB$. (Билет 1, 1991)

4.2. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Прямая, параллельная стороне AB и касающаяся окружности, пересекает сторону AC в точке M такой, что $MC = \frac{2}{5} AC$. Найти радиус окружности, если периметр треугольника ABC равен 20. (Билет 2, 1991)

4.3. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Через точку M, лежащую на стороне BC, проведена касательная к окружности, пересекающая прямую AC в точке K. Найти AK, если $AC = a$, $AB = \frac{6}{5} a$, $MB = \frac{1}{10} a$. (Билет 3, 1991)

4.4. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Прямая, параллельная стороне BC и касающаяся окружности, пересекает сторону AB в точке N такой, что $AN = (3/8)\, AB$. Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 12. (Билет 4, 1991)

4.5. Отрезок AD является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Окружность радиуса $\sqrt{15}$ проходит через точки A, C, D и пересекает сторону AB в точке E так, что $AE{:}AB = 3{:}5$. Найти площадь треугольника ABC. (Билет 5, 1991)

4.6. Отрезок BD является медианой равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружность радиуса 4 проходит через точки B, A, D и пересекает сторону BC в точке E так, что $BE{:}BC = 7{:}8$. Найти периметр треугольника ABC. (Билет 6, 1991)

4.7. Отрезок BE является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90°$). Окружность проходит через точки B, A, E и пересекает сторону BC в точке D так, что $BD{:}BC = 5{:}13$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади круга. (Билет 7, 1991)

4.8. Отрезок AE является высотой равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Окружность проходит через точки A, C, E и пересекает сторону AB в точке D так, что $AD{:}AB = 7{:}9$. Найти отношение длины окружности к периметру треугольника ABC. (Билет 8, 1991)

4.9. На диагонали BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D = 90°$, $BC \parallel AD$) взята точка Q так, что $BQ{:}QD = 1{:}3$. Окружность с центром в точке Q касается прямой AD и пересекает прямую BC в точках P и M. Найти длину стороны AB, если $BC = 9$, $AD = 8$, $PM = 4$. (Билет 9, 1991)

4.10. Точки M и N являются серединами боковых сторон AC и CB равнобедренного треугольника ABC. Точка L расположена на медиане BM так, что $BL:BM = 4:9$. Окружность с центром в точке L касается прямой MN и пересекает прямую AB в точках Q и T. Найти периметр треугольника MNC, если $QT = 2$, $AB = 8$. (Билет 10, 1991)

4.11. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP:PC = 3:5$. Окружность с центром в точке P касается прямой BC и пересекает отрезок AD в точках K и L. Точка K лежит между точками A и L, $AK = 9$, $KL = 3$, $LD = 12$. Найти периметр параллелограмма $ABCD$. (Билет 11, 1991)

4.12. Точки K и L являются серединами боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC. Точка M расположена на медиане AL так, что $AM:ML = 13:12$. Окружность с центром в точке M касается прямой AC и пересекает прямую KL в точках P и Q. Найти периметр треугольника ABC, если $KL = 10$, $PQ = 4$. (Билет 12, 1991)

4.13. В прямоугольном треугольнике ABC из точки E, расположенной в середине катета BC, опущен перпендикуляр EL на гипотенузу AB. Найти углы треугольника ABC, если $AE = \sqrt{10}\,EL$ и $BC > AC$. (Билет 1, 1992)

4.14. В ромбе $ABCD$ из вершины B на сторону AD опущен перпендикуляр BE. Найти углы ромба, если $2\sqrt{3}\,CE = \sqrt{7}\,AC$. (Билет 2, 1992)

4.15. В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковая сторона в $\sqrt{2}$ раз меньше меньшего основания BC, CE — высота. Найти периметр трапеции, если $BE = \sqrt{5}$, $BD = \sqrt{10}$. (Билет 3, 1992)

4.16. В ромбе $ABCD$ из вершины D на сторону BC опущен перпендикуляр DK. Найти длину стороны ромба, если $AC = 2\sqrt{6}$, $AK = \sqrt{14}$. (Билет 4, 1992)

4.17. В остроугольном треугольнике ABC точка D выбрана на стороне AB так, что $\angle DCA = 45°$. Точка D' симметрична точке D относительно прямой BC, а точка D'' симметрична точке D' относительно прямой AC и лежит на продолжении отрезка BC за точку C. Найти площадь треугольника ABC, если $BC = \sqrt{3}\,CD''$ $AB = 4$. (Билет 5, 1992)

4.18. В параллелограмме $ABCD$ угол A тупой, $AD > AB$, $AD = 7$. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BD, а точка A'' симметрична точке A' относительно прямой AC и лежит на диагонали BD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если $BA'' = \frac{4}{5}\,BD$. (Билет 6, 1992)

4.19. В треугольнике ABC угол C тупой, а точка D выбрана на продолжении стороны AB за точку B так, что $\angle ACD = 135°$. Точка D' симметрична точке D относительно прямой BC, точка D'' симметрична точке D' относительно прямой AC и лежит на прямой BC. Найти площадь треугольника ABC, если $\sqrt{3}BC = CD''$, $AC = 6$. (Билет 7, 1992)

4.20. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый, $AB > AD$, $AB = 14$. Точка C' симметрична точке C относительно прямой BD, а точка C'' симметрична точке C' относительно прямой AC и лежит на продолжении диагонали BD за точку D. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если $BC'' = \frac{4}{3}BD$. (Билет 8, 1992)

4.21. Высоты равнобедренного остроугольного треугольника ABC, в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если $AO = 5$, а длина высоты AD равна 8. (Билет 9, 1992)

4.22. Около трапеции $ABCD$ описана окружность, центр которой лежит на основании AD. Найти площадь трапеции, если $AB = 3/4$, $AC = 1$. (Билет 10, 1992)

4.23. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O. Найти периметр трапеции, если $BO = 7/8$, $OD = 25/8$, $\angle ABD = 90°$. (Билет 11, 1992)

4.24. В равнобедренном треугольнике ABC основание AB является диаметром окружности, которая пересекает боковые стороны AC и CB в точках D и E соответственно. Найти периметр треугольника ABC, если $AD = 2$, $AE = 8/3$. (Билет 12, 1992)

4.25. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершину B, касается стороны AC и пересекает сторону AB в точке K такой, что $BK:AK = 5:1$. Найти длину стороны BC. (Билет 1, 1993)

4.26. Биссектриса AD и высота BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершину A, середину стороны AC и пересекает сторону AB в точке K такой, что $AK:KB = 1:3$. Найти длину стороны BC. (Билет 2, 1993)

4.27. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершину A, касается стороны BC и пересекает сторону AC в точке M такой, что $AM:MC = 4:1$. Найти длину стороны AB. (Билет 3, 1993)

4.28. Биссектриса BK и высота CZ остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершину B, середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке M такой, что $AM:MB = 2:1$. Найти длину стороны AC. (Билет 4, 1993)

4.29. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что треугольник CKD равносторонний. Известно, что расстояния от точки

K до прямых AD, AB и BC равны соответственно 3, 6 и 5. Найти периметр параллелограмма. (Билет 5, 1993)

4.30. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ с тупым углом при вершине D построен равносторонний треугольник CDE так, что точки A и E лежат по разные стороны от прямой CD. Известно, что растояния от точек D и E до прямой BC равны соответственно 3 и 8, а расстояние от точки E до прямой AB равно 13. Найти площадь параллелограмма $ABCD$. (Билет 6, 1993)

4.31. Внутри параллелограмма $KLMN$ взята точка P так, что треугольник KPN равносторонний. Известно, что расстояния от точки P до прямых KL, LM и MN равны соответственно 10, 3 и 6. Найти периметр параллелограмма. (Билет 7, 1993)

4.32. На стороне KN параллелограмма $KLMN$ с тупым углом при вершине M построен равносторонний треугольник KTN так, что точки T и M лежат по разные стороны от прямой KN. Известно, что растояния от точек T и K до прямой MN равны соответственно 8 и 5, а расстояние от точки T до прямой LM равно 10. Найти площадь параллелограмма $KLMN$. (Билет 8, 1993)

4.33. Продолжения медиан AM и BK треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и F соответственно, причем $AE{:}AM = 2{:}1$, $BF{:}BK = 3{:}2$. Найти углы треугольника ABC. (Билет 9, 1993)

4.34. Продолжения высоты CH и биссектрисы CL треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и M соответственно, причем $CP = 2CH$, $CM = \frac{9}{4}CL$. Найти углы треугольника ABC. (Билет 10, 1993)

4.35. Продолжения медиан AE и CF треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках D и N соответственно, причем $AD{:}AE = 2{:}1$, $CN{:}CF = 4{:}3$. Найти углы треугольника ABC. (Билет 11, 1993)

4.36. Продолжения высоты BD и биссектрисы BF треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках K и L соответственно, причем $BK = 2BD$, $BL = \frac{8}{3}BF$. Найти углы треугольника ABC. (Билет 12, 1993)

4.37. Дан ромб $ABCD$ с тупым углом при вершине A. На продолжении стороны AD за точку D взята точка K. Отрезки BK и CD пересекаются в точке L. Найти площадь треугольника ABK, если $BL = 2$, $KL = 5$, а высота ромба равна 1. (Билет 1, 1994)

4.38. Даны треугольник ABC и ромб $BDEF$, все вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC, а угол при вершине E — тупой. Найти площадь треугольника ABC, если $AE = 3$, $CE = 7$, а радиус окружности, вписанной в ромб, равен 1. (Билет 2, 1994)

4.39. На продолжении стороны BC ромба $ABCD$ за точку B взята точка M так, что угол MDC — тупой. Отрезки AB и DM пересекаются в точке N. Найти площадь треугольника CDM, если $DN = 3$, $MN = 4$, а высота ромба равна 2. (Билет 3, 1994)

4.40. Даны треугольник ABC с тупым углом при вершине A и ромб $CDEF$, все вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC. Найти площадь треугольника ABC, если $AE = 2$, $BE = 7$, а радиус окружности, вписанной в ромб, равен $1/2$. (Билет 4, 1994)

4.41. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $CP = 5$, $PE = 2$. (Билет 5, 1994)

4.42. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если $CO = 9$, $OD = 5$. (Билет 6, 1994)

4.43. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке K. Найти площадь треугольника ABC, если $CK = 5$, $KH = 1$. (Билет 7, 1994)

4.44. Медиана AD и биссектриса CE прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника ABC, если $CM = 8$, $ME = 5$. (Билет 8, 1994)

4.45. В треугольнике ABC угол C равен $\pi - \arcsin(12/13)$. На стороне AB взята точка D так, что $AD = 18$, $BD = 6$. Найти радиус окружности, проходящей через вершину C, касающейся стороны AB в точке D и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC. (Билет 9, 1994)

4.46. В треугольнике ABC угол A равен $\pi - \arcsin(8/17)$, а длина стороны BC равна 8. На продолжении CB за точку B взята точка D так, что $BD = 1$. Найти радиус окружности, проходящей через вершину A, касающейся прямой BC в точке D и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC. (Билет 10, 1994)

4.47. В треугольнике ABC угол B равен $\arccos(15/17)$. На стороне AC взята точка K так, что $AK = 12$, $KC = 4$. Найти радиус окружности, проходящей через вершину B, касающейся стороны AC в точке K и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC. (Билет 11, 1994)

4.48. В треугольнике ABC угол A равен $\arccos(5/13)$, а длина стороны BC равна 12. На продолжении BC за точку C взята точка M так, что $CM = 6$. Найти радиус окружности, проходящей через вершину A, касающейся прямой BC в точке M и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC. (Билет 12, 1994)

4.49. Через вершины A, B и C трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$) проведена окружность. Известно, что окружность касается прямой CD, а ее центр лежит на диагонали AC. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 2$, $AD = 8$. (Билет 1, 1995)

4.50. Окружность с центром O проходит через вершину B ромба $ABCD$ и касается лучей CB и CD. Найти площадь ромба, если $DO=\frac{3}{4}$, $OC=\frac{5}{4}$. (Билет 2, 1995)

4.51. Через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ ($AD\|BC$) проведена окружность. Известно, что окружность касается прямой AB, а ее центр лежит на диагонали BD. Найти периметр трапеции, если $BC=9$, $AD=25$. (Билет 3, 1995)

4.52. Окружность с центром O проходит через вершину C ромба $ABCD$ и касается лучей DC и DA. Найти площадь ромба, если $OA=4$, $OD=5$. (Билет 4, 1995)

4.53. Через середину гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая катет BC в точке D, а продолжение катета AB за точку A — в точке E. Найти площадь треугольника ABC, если $CD=1$, $AE=2$, $\angle CAB=\arccos\frac{3}{5}$. (Билет 5, 1995)

4.54. Через середину стороны AC равнобедренного треугольника ABC ($AC=BC$) проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K, а продолжение стороны AB за точку A — в точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $CK=2$, $AP=5$, $\angle ABC=\arccos\frac{1}{4}$. (Билет 6, 1995)

4.55. Через середину катета AB прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая гипотенузу AC в точке E, а продолжение катета BC за точку B — в точке F. Найти площадь треугольника ABC, если $AE=2$, $BF=3$, $\angle ACB=60^\circ$. (Билет 7, 1995)

4.56. Через середину стороны BC равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке D, а продолжение стороны AC за точку C — в точке E. Найти площадь треугольника ABC, если $BD=3$, $CE=4$, $\angle BAC=\arccos\frac{1}{3}$. (Билет 8, 1995)

4.57. В равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) вписана окружность с центром O. Касательная к окружности пересекает стороны BC и CA треугольника в точках M и N соответственно. Найти радиус окружности, если $\angle MNC=2\angle NMC$, $OM=\sqrt{10}$, $ON=\frac{15}{4}$. (Билет 9, 1995)

4.58. Вокруг окружности с центром O описана трапеция $ABCD$, в которой $BC\|AD$, $BC<AD$. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в точке M. Найти радиус окружности, если $MB=BC$, $OB=\sqrt{5}$, $OC=\sqrt{2}$. (Билет 10, 1995)

4.59. В равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) вписана окружность с центром O. Касательная к окружности пересекает стороны AB и AC треугольника в точках D и E соответственно.

Найти радиус окружности, если $\angle ADE = 2\angle AED$, $OD = 3\sqrt{5}$, $OE = 4\sqrt{2}$. (Билет 11, 1995)

4.60. Вокруг окружности с центром O описана трапеция $ABCD$, в которой $BC \| AD$, $BC < AD$. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в точке K. Найти радиус окружности, если $BC = KC$, $OB = 2$, $OC = \sqrt{5}$. (Билет 12, 1995)

4.61. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность. Прямая CD, перпендикулярная AB, пересекает окружность в точке P. Касательная к окружности, проходящая через точку P, пересекает прямую AB в точке Q. Найти длины отрезков PA и PQ, если $AC = 5$, $\angle ABC = 2\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$. (Билет 1, 1996)

4.62. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность. Биссектриса угла BAC пересекает окружность в точке D. Касательная к окружности, проходящая через точку D, пересекает прямую AC в точке E. Найти длины отрезков CD и DE, если $AB = 8$, $\angle BAC = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. (Билет 2, 1996)

4.63. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность. Прямая AD, перпендикулярная BC, пересекает окружность в точке M. Касательная к окружности, проходящая через точку M, пересекает прямую BC в точке N. Найти длины отрезков MC и MN, если $AC = 8$, $\angle ABC = 2\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. (Билет 3, 1996)

4.64. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность. Биссектриса угла BCA пересекает окружность в точке K. Касательная к окружности, проходящая через точку K, пересекает прямую AC в точке L. Найти длины отрезков KA и KL, если $AB = 12$, $\angle BCA = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$. (Билет 4, 1996)

4.65. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы AM и BK пересекаются в точке O. Площади треугольников BOM и COM соответственно равны 25 и 30. Найти площадь треугольника ABC и проекцию отрезка OM на прямую BC. (Билет 5, 1996)

4.66. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы AM и BK пересекаются в точке O. Площадь треугольника COK равна 3, угол BCA равен $\arccos\frac{5}{13}$. Найти площадь треугольника COM и проекцию отрезка AM на прямую BC. (Билет 6, 1996)

4.67. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы CM и BK пересекаются в точке O. Площади треугольников BOM и AOM соответственно равны 25 и 40. Найти площадь треугольника ABC и проекцию отрезка OM на прямую AB. (Билет 7, 1996)

4.68. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы CM и BK пересекаются в точке O. Площадь треугольника AOK равна 10, угол BCA равен $\arccos\frac{12}{13}$. Найти площадь треугольника AOM и проекцию отрезка CM на прямую AB. (Билет 8, 1996)

4.69. Окружность с центром на стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается сторон AB и BC. Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 25, а отношение высоты BD к стороне AC равно $\frac{3}{8}$. (Билет 9, 1996)

4.70. Центр окружности, касающейся катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC, лежит на гипотенузе AB. Найти радиус окружности, если он в шесть раз меньше суммы катетов, а площадь треугольника ABC равна 27. (Билет 10, 1996)

4.71. Окружность с центром на стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается сторон AB и BC, а сторону AC делит на три равные части. Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна $9\sqrt{2}$. (Билет 11, 1996)

4.72. Центр окружности, касающейся катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC, лежит на гипотенузе AB. Найти диаметр окружности, если он в четыре раза меньше суммы катетов, а площадь треугольника ABC равна 16. (Билет 12, 1996)

4.73. В трапеции $ABCD$ сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC. Окружность касается стороны AB в точке K, лежащей между точками A и B, имеет с отрезком BC единственную общую точку C, проходит через точку D и пересекает отрезок AD в точке E ($E \neq D$). Найти расстояние от точки K до прямой CD, если $AD = 48$, $BC = 12$. (Билет 1, 1997)

4.74. Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей внутри треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до сторон AC и BC равны 6 и 24 соответственно. Найти расстояние от точки K до стороны AB. (Билет 2, 1997)

4.75. В трапеции $ABCD$ сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC. Окружность касается стороны AB в точке K, лежащей между точками A и B, проходит через точки C и D, пересекает отрезки AD и BC в их внутренних точках. Найти расстояние от точки K до прямой CD, если $AD = 49$, $BC = 36$. (Билет 3, 1997)

4.76. Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до продолжений сторон AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найти расстояние от точки K до прямой AB. (Билет 4, 1997)

4.77. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC расположены точки D и E соответственно так, что BD — биссектриса треугольника ABC, $DC = CE = \frac{4}{3}$, $BD = 2$, $\angle ABC = \angle ADB$. Найти BC и площадь S треугольника ABC. (Билет 5, 1997)

4.78. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC расположены точки C и E соответственно так, что CD — биссектриса треугольника ABC, DE — биссектриса треугольника ACD, $EC = ED = \frac{4}{9}$, $BC = 1$. Найти CD и площадь S треугольника ABC. (Билет 6, 1997)

4.79. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC расположены точки E и D соответственно так, что CE — биссектриса треугольника ABC, $ED = AD = \frac{9}{4}$, $CA = 4$, $\angle ACB = \angle CEB$. Найти CE и площадь S треугольника ABC. (Билет 7, 1997)

4.80. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC расположены точки E и D соответственно так, что AD — биссектриса треугольника ABC DE — биссектриса треугольника ABD, $AE = ED = \frac{9}{16}$, $CD = \frac{3}{4}$. Найти AC и площадь S треугольника ABC. (Билет 8, 1997)

4.81. Около окружности радиуса 1 описаны ромб и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 5. Найти сторону ромба. (Билет 9, 1997)

4.82. Около окружности описаны ромб со стороной 3 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 7. Найти радиус окружности. (Билет 10, 1997)

4.83. Около окружности радиуса 1 описаны ромб и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 7. Найти сторону ромба. (Билет 11, 1997)

4.84. Около окружности описаны ромб со стороной 4 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 9. Найти радиус окружности. (Билет 12, 1997)

4.85. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, если $BC = 4$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{5}{2}$. (Билет 1, 1998)

4.86. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD. В треугольник ACD вписана окружность, а около треугольника BCD описана окружность. Найти расстояние между центрами этих окружностей, если $BC = 3$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{5}{2}$. (Билет 2, 1998)

4.87. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанными в треугольники AOB и BOC, если $BC = 8$, $BD = 10$. (Билет 3, 1998)

4.88. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD. Около треугольника ACD описана окружность, а в треугольник BCD вписана окружность. Найти расстояние между центрами этих окружностей, если $BC = 3$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{5}{2}$. (Билет 4, 1998)

4.89. Сторона ромба $ABCD$ равна 6. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, равно 8. Найти радиусы этих окружностей. (Билет 5, 1998)

4.90. Дан ромб $ABCD$. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD, равны 3 и 4. Найти расстояние между центрами этих окружностей. (Билет 6, 1998)

4.91. Сторона ромба $ABCD$ равна 4. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ACD и ABD, равно 3. Найти радиусы этих окружностей. (Билет 7, 1998)

4.92. Дан ромб $ABCD$. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, равны 1 и 2. Найти расстояние между центрами этих окружностей. (Билет 8, 1998)

4.93. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D. Найти стороны параллелограмма, если его площадь $S = \sqrt{2}$, а $\angle BAC = \arcsin \frac{1}{3}$. (Билет 1, 1999)

4.94. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D. Найти стороны параллелограмма, если его площадь $S = 2\sqrt{5}$, а $\angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}}$. (Билет 2, 1999)

4.95. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D. Найти стороны параллелограмма, если его площадь $S = 4$, а $\angle BAC = \arccos \frac{4}{5}$. (Билет 3, 1999)

4.96. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D. Найти стороны параллелограмма, если его площадь $S = 2\sqrt{7}$, а $\angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{7}}$. (Билет 4, 1999)

4.97. Медиана AE и биссектриса CD равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через M параллельно AC, пересекает AB и BC в точках P и Q соответственно. Найти MQ и радиус окружности, описанной около треугольника PQB, если $AC = 4$, $\angle ACB = \operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$. (Билет 5, 1999)

4.98. В треугольнике ABC, где $AB = BC = 3$, $\angle ABC = \arccos\frac{1}{9}$, проведены медиана AD и биссектриса CE, пересекающиеся в точке M. Через M проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найти PM и радиус окружности, вписанной в треугольник PQB. (Билет 6, 1999)

4.99. Медиана AE и биссектриса CD равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через M параллельно AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найти EQ и радиус окружности, описанной около треугольника PQB, если $AB = 4$, а $\angle CAB = \arccos\frac{1}{8}$. (Билет 7, 1999)

4.100. В треугольнике ABC, где $AB = BC = 5$, $\angle ABC = 2\arcsin\frac{1}{5}$, проведены медиана AD и биссектриса CE, пересекающиеся в точке M. Через M проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найти AP и радиус окружности, вписанной в треугольник PQB. (Билет 8, 1999)

4.101. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти радиус окружности, если $CD = 4$, $BD = 5$. (Билет 1, 2000)

4.102. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти длину отрезка CD, если $\angle ABC = 2\arcsin(1/5)$, а радиус окружности $R = 5$. (Билет 2, 2000)

4.103. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти радиус окружности, если $AC = 3$, $CD = 2$. (Билет 3, 2000)

4.104. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти радиус окружности, если $\angle ABC = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/4)$, $CD = 8$. (Билет 4, 2000)

4.105. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 — в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B

и пересекает окружность C_2 в точке F, а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает прямую l в точке E. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AF = 3\sqrt{2}$, $BE = \sqrt{5}$. (Билет 5, 2000)

4.106. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 — в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E, а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает l в точке F. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AB = 4$, $EF = \sqrt{10}$. (Билет 6, 2000)

4.107. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 — в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке F, а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает прямую l в точке E. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AE = 3$, $AF = 4\sqrt{3}$. (Билет 7, 2000)

4.108. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 — в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E, а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пресекает l в точке F. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AE = 1$, $EF = 3/\sqrt{2}$. (Билет 8, 2000)

4.109. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что D лежит на отрезке AC. Найти AB, CD и радиус окружности, если $BC = 4$, $BD = 3$, $\angle BAC = \arccos\frac{1}{3}$. (Билет 1, 2001)

4.110. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что точка C лежит на отрезке AD. Найти AC, BC и радиус окружности, если $BD = 5$, $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\angle BDC = \arccos\sqrt{\frac{5}{21}}$. (Билет 2, 2001)

4.111. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что D лежит на отрезке AC. Найти AD, CD и радиус окружности, если $AB = 3\sqrt{11}$, $BC = 8$ и $\angle ABD = \arcsin\frac{3}{4}$. (Билет 3, 2001)

4.112. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что C лежит на отрезке AD. Найти AB,

BC и радиус окружности, если $CD=1$, $\angle BAC=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle BCD=\arccos\sqrt{\frac{2}{11}}$. (Билет 4, 2001)

4.113. В треугольнике ABC таком, что $AB=BC=4$ и $AC=2$, проведены биссектриса AA_1, медиана BB_1 и высота CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых:

1) AC, AA_1 и CC_1;

2) AA_1, BB_1 и CC_1. (Билет 5, 2001)

4.114. В треугольнике ABC таком, что $AB=BC=6$ и $AC=2$, проведены медиана AA_1, высота BB_1 и биссектриса CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых:

1) BB_1, CC_1 и BC;

2) AA_1, BB_1 и CC_1. (Билет 6, 2001)

4.115. В треугольнике ABC таком, что $AB=BC=4$ и $AC=2$, проведены медиана AA_1, биссектриса BB_1 и высота CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых:

1) AB, AA_1 и BB_1;

2) AA_1, BB_1 и CC_1. (Билет 7, 2001)

4.116. В треугольнике ABC таком, что $AB=BC=6$ и $AC=2$, проведены биссектриса AA_1, высота BB_1 и высота CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых:

1) AB, AA_1 и BB_1;

2) AA_1, BB_1 и CC_1. (Билет 8, 2001)

4.117. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{6}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{6}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2=\sqrt{70}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2. Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1\in C_1$, $B_1\in C_1$, $A_2\in C_2$, $B_2\in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2. Через точку B_2 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2. Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B. Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_2. (Билет 9, 2001)

4.118. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $OO_1=2\sqrt{13}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2. Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1\in C_1$, $B_1\in C_1$, $A_2\in C_2$, $B_2\in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2. Через точку B_1 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2. Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B. Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1. (Билет 10, 2001)

4.119. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{6}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{6}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = \sqrt{70}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2. Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_2 и B_2 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2. Через точку B_1 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2. Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B. Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1. (Билет 11, 2001)

4.120. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = 2\sqrt{13}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2. Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_2 и B_2 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2. Через точку B_2 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2. Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B. Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_2. (Билет 12, 2001)

4.121. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) окружность касается основания BC, боковых сторон AB и CD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD. Найти радиус окружности, если $AD:BC = 9:7$, а площадь трапеции $S = 8$. (Билет 1, 2002)

4.122. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) окружность касается основания AD, боковых сторон AB и CD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD. Найти радиус окружности, если $AD:BC = 7:5$, а площадь трапеции $S = 4$. (Билет 2, 2002)

4.123. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) окружность касается основания BC, боковых сторон AB и CD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD. Найти радиус окружности, если $AD:BC = 5:4$, а площадь трапеции $S = 3$. (Билет 3, 2002)

4.124. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) окружность касается основания AD, боковых сторон AB и BD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD. Найти радиус окружности, если $AD:BC = 5:3$, а площадь трапеции $S = 9$. (Билет 4, 2002)

4.125. Один из углов треугольника равен $3\pi/4$, радиус вписанной в него окружности равен 4, а периметр треугольника равен $16(6 + \sqrt{2})$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника. (Билет 5, 2002)

4.126. Один из углов треугольника равен $\pi/4$, радиус вписанной в него окружности равен $2(2-\sqrt{2})$, а радиус описанной вокруг него окружности равен 3. Найти площадь этого треугольника. (Билет 6, 2002)

4.127. Один из углов треугольника равен $\pi/6$, радиус описанной окружности равен $3(2\sqrt{3}-1)$, а периметр треугольника равен $16\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник. (Билет 7, 2002)

4.128. Один из углов треугольника равен $5\pi/6$, радиус вписанной окружности равен 1, а площадь треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника. (Билет 8, 2002)

4.129. Окружность с центром на стороне AB равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ касается отрезка AC в точке F, пересекает отрезок BC в точке G, проходит через точку B и пересекает отрезок AB в точке E, причем $AE=a$, $\angle BFG=\gamma$. Найти радиус окружности. (Билет 9, 2002)

4.130. Окружность с центром на стороне AB равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ проходит через точку A, пересекает отрезок AC в точке F, касается отрезка BC в точке G и пересекает отрезок AB в точке E, причем $GC/BG=\sqrt{3}-1$, $FG=a$. Найти радиус окружности. (Билет 10, 2002)

4.131. Окружность с центром на стороне AB равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ касается отрезка AC в точке F, пересекает отрезок BC в точке G, проходит через точку B и пересекает отрезок AB в точке E, причем $GC=a$, $\angle BFG=\gamma$. Найти радиус окружности. (Билет 11, 2002)

4.132. Окружность с центром на стороне AB равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ проходит через точку A, пересекает отрезок AC в точке F, касается отрезка BC в точке G и пересекает отрезок AB в точке E, причем $GC=BG$, $FC=a$. Найти радиус окружности. (Билет 12, 2002)

4.133. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ $(BC\|AD)$ проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $CD=6\sqrt{13}$, $AE=8$. (Билет 1, 2003)

4.134. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ $(BC\|AD)$ проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BE=26$, $DE=9\sqrt{13}$. (Билет 2, 2003)

4.135. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ $(BC\|AD)$ проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BC=2$, $CD=10\sqrt{26}$. (Билет 3, 2003)

4.136. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ $(BC\|AD)$ проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 5\sqrt{2}$, $CD = 10\sqrt{13}$. (Билет 4, 2003)

4.137. В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC и площадью, равной 2, прямые BC и AD касаются окружности диаметром $\sqrt{2}$ в точках B и D соответственно. Боковые стороны трапеции AB и CD пересекают окружность в точках M и N соответственно. Длина MN равна 1. Найти величину угла MBN и длину основания AD. (Билет 5, 2003)

4.138. В трапеции $ABCD$ с большим основанием BC и площадью, равной $4\sqrt{3}$, прямые BC и AD касаются окружности диаметром 2 в точках B и D соответственно. Боковые стороны трапеции AB и CD пересекают окружность в точках M и N соответственно. Длина MN равна $\sqrt{3}$. Найти величину угла MDN и длину основания BC. (Билет 6, 2003)

4.139. В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC и площадью, равной 4, прямые BC и AD касаются окружности диаметром 2 в точках B и D соответственно. Боковые стороны трапеции AB и CD пересекают окружность в точках M и N соответственно. Длина MN равна $\sqrt{2}$. Найти величину угла MBN и длину основания AD. (Билет 7, 2003)

4.140. В трапеции $ABCD$ с большим основанием BC и площадью, равной $12\sqrt{3}$, прямые BC и AD касаются окружности диаметром $2\sqrt{3}$ в точках B и D соответственно. Боковые стороны трапеции AB и CD пересекают окружность в точках M и N соответственно. Длина MN равна 3. Найти величину угла MDN и длину основания BC. (Билет 8, 2003)

4.141. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, медиана $AD = \frac{\sqrt{97}}{2}$. На биссектрисе CE выбрана точка F такая, что $CF = \frac{CE}{5}$. Через точку F проведена прямая l, параллельная BC. Найти расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до прямой l. (Билет 9, 2003)

4.142. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, а радиус описанной окружности равен $\frac{25}{8}$. На высоте CD выбрана точка E такая, что $CE = \frac{CD}{4}$, и через точку E проведена прямая l, параллельная BC. Найти расстояние от центра окружности, вписанный в треугольник ABC, до прямой l. (Билет 10, 2003)

4.143. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = 6$, а радиус вписанной окружности равен $\frac{3}{2}$. На медиане CD выбрана точка E такая, что $CE = \frac{CD}{5}$. Через точку E проведена прямая l, параллельная BC. Найти расстояние от центра окружности, описанный около треугольника ABC, до прямой l. (Билет 11, 2003)

4.144. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = 6$, высота $AD = \frac{24}{5}$. На биссектрисе CE выбрана точка F такая, что $CF = \frac{CE}{4}$. Через точку F проведена прямая l, параллельная BC. Найти расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник ABC, до прямой l. (Билет 12, 2003)

4.145. В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2 — биссектрисами углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раз меньше расстояния между m_1 и m_2. Найти угол BAD и радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если $AC = \sqrt{22/3}$, $BD = 2$. (Билет 1, 2004)

4.146. В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2 — биссектрисами углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раз больше расстояния между m_1 и m_2. Найти угол BAD и радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AC = 4$, $BD = \sqrt{22}$. (Билет 2, 2004)

4.147. В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2 — биссектрисами углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раз меньше расстояния между m_1 и m_2. Найти угол BAD и радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если $AC = \sqrt{41/3}$, $BD = 3$. (Билет 3, 2004)

4.148. В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2 — биссектрисами углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раз больше расстояния между m_1 и m_2. Найти угол BAD и радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AC = 3$, $BD = \sqrt{59/3}$. (Билет 4, 2004)

4.149. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника AOC, вершина O которого лежит на катете BC прямоугольного треугольника ABC и является центром окружности радиуса R, касающейся гипотенузы AC и проходящей через точку B? (Билет 5, 2004)

4.150. Какая наименьшая площадь может быть у прямоугольного треугольника ABC, в котором окружность радиуса R с центром на катете AB касается гипотенузы AC и проходит через точку B? (Билет 6, 2004)

4.151. Какая наименьшая длина может быть у гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC, в котором окружность радиуса R с центром на катете BC касается стороны AC и проходит через точку B? (Билет 7, 2004)

4.152. Какое наименьшее значение может быть у суммы длин катета BC и гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC, в котором окружность радиуса R с центром на катете AB касается стороны AC и проходит через точку B? (Билет 8, 2004)

4.153. Четырехугольник, один из углов которого равен $\operatorname{arctg}(4/3)$, вписан в окружность радиуса $\sqrt{6}$ и описан около окружности радиуса 1. Найти площадь четырехугольника и угол между его диагоналями. (Билет 9, 2004)

4.154. Четырехугольник, один из углов которого равен $\arcsin(4/5)$, вписан в окружность радиуса $\sqrt{15}$ и описан около окружности радиуса 2. Найти площадь четырехугольника и угол между его диагоналями. (Билет 10, 2004)

4.155. Четырехугольник, один из углов которого равен $2\operatorname{arcctg}(2)$, вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$ и описан около окружности радиуса 1. Найти площадь четырехугольника и угол между его диагоналями. (Билет 11, 2004)

4.156. Четырехугольник, один из углов которого равен $\arccos(3/5)$, вписан в окружность радиуса $2\sqrt{10}$ и описан около окружности радиуса 3. Найти площадь четырехугольника и угол между его диагоналями. (Билет 12, 2004)

5. СТЕРЕОМЕТРИЯ

5.1. Конус расположен внутри треугольной пирамиды $SABC$ так, что плоскость его основания совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды, а три других грани касаются его боковой поверхности. Найти обьем пирамиды, если длина образующей конуса равна 1, $\angle ABS = \frac{\pi}{2}$, $\angle BSC = \frac{\pi}{12}$, $\angle SCB = \frac{\pi}{4}$. (Билет 1, 1991)

5.2. Сфера, вписанная в треугольную пирамиду $KLMN$, касается одной из граней пирамиды в центре вписанной в эту грань окружности. Найти обьем пирамиды, если $MK = \frac{5}{4}$, $\angle NMK = \frac{\pi}{2}$, $\angle KML = 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, $\angle NML = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. (Билет 2, 1991)

5.3. Конус расположен внутри треугольной пирамиды $SABC$ так, что плоскость его основания совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды, а три других грани касаются его боковой поверхности. Найти объем пирамиды, если длина образующей конуса равна 1, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\angle SBA = \frac{\pi}{6}$, $\angle ASB = \frac{\pi}{4}$. (Билет 3, 1991)

5.4. Сфера, вписанная в треугольную пирамиду $EFGH$, касается одной из граней пирамиды в центре вписанной в эту грань окружности. Найти обьем пирамиды, если $FG = 3\sqrt{5}$, $\angle HFG = \frac{\pi}{2}$, $\angle EFG = \frac{3\pi}{2} - 3 \operatorname{arctg} \sqrt{5}$, $\angle EFH = \operatorname{arctg} \sqrt{5}$. (Билет 4, 1991)

5.5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ ($BC \| AD$), $BC = (4/5)AD$, $\angle ASD = \angle CDS = \pi/2$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания равен $5/3$. Найти объем пирамиды. (Билет 5, 1991)

5.6. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является параллелограмм $ABCD$, $\angle BSC = \angle ASB = \pi/2$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований усеченного конуса, высота которого равна $4/3$, а радиусы оснований равны $1/2$ и $5/6$. Найти объем пирамиды. (Билет 6, 1991)

5.7. В четырехугольной пирамиде $SKLMN$ основанием является трапеция $KLMN$ ($LM \| KN$), $LM = \frac{3}{5} KN$, $\angle KSN = \angle MNS = \pi/2$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 3, а радиус основания равен $5/2$. Найти объем пирамиды. (Билет 7, 1991)

5.8. В четырехугольной пирамиде $SKLMN$ основанием является параллелограмм $KLMN$, $\angle LSM = \angle KSL = \frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований усеченного конуса, высота которого равна $3/2$, а радиусы оснований равны 1 и $5/4$. Найти объем пирамиды. (Билет 8, 1991)

5.9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найти объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}AB$. (Билет 9, 1991)

5.10. В сферу радиуса $5/8$ вписана четырехугольная пирамида $SABCD$, основанием которой служит параллелограмм $ABCD$. Точка пересечения диагоналей параллелограмма является ортогональной проекцией вершины S на плоскость $ABCD$. Плоскость каждой грани пирамиды касается второй сферы, расстояние от центра которой до прямой AD вдвое больше расстояния до прямой BC. Найти радиус второй сферы и расстояние от ее центра до вершины S, если $AD:AB = 5:3$. (Билет 10, 1991)

5.11. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с тупым углом при вершине A. Высота ромба равна 2, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 1 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найти объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой BD равно $\frac{\sqrt{14}}{5}AB$. (Билет 11, 1991)

5.12. В сферу радиуса $13/3$ вписана четырехугольная пирамида $SABCD$, основанием которой служит параллелограмм $ABCD$. Точка пересечения диагоналей параллелограмма является ортогональной проекцией вершины S на плоскость $ABCD$. Плоскость каждой грани пирамиды касается второй сферы, расстояние от центра которой до прямой AB втрое больше расстояния до прямой CD. Найти радиус второй сферы и расстояние от ее центра до вершины S, если $AB:AD = 1:4$. (Билет 12, 1991)

5.13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точки D и E являются серединами ребер AC и BC соответственно. Через точку E проведена плоскость β, пересекающая ребра AB и SB и удаленная от точек D и B на одинаковое расстояние, равное $1/2$. Найти длины отрезков, на которые плоскость делит ребро SB, если $BC = 4$, $SC = 3$. (Билет 1, 1992)

5.14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AD = 1/5$ и $SD = 1$. Через точку B проведена плоскость α, пересекающая ребро SC и удаленная от точек A и C на одинаковое расстояние, равное $1/10$. Найти длины отрезков, на которые плоскость α делит ребро SC, если известно, что α не параллельна прямой AC. (Билет 2, 1992)

5.15. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точки K и L являются серединами ребер AB и AC соответственно. Через точку L проведена плоскость β, пересекающая ребра BC и SC и удаленная от точек K и C на одинаковое расстояние, равное $1/3$.

Найти длины отрезков, на которые плоскость β делит ребро SC, если $AB = 4/3$, $SB = 4/5$. (Билет 3, 1992)

5.16. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 5$, $SA = 4$. Через точку A проведена плоскость α, пересекающая ребро SD и удаленная от точек B и D на одинаковое расстояние, равное $5/4$. Найти длины отрезков, на которые плоскость α делит ребро SD, если известно, что α не параллельна прямой BD. (Билет 4, 1992)

5.17. Сфера вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, основанием которой является трапеция $ABCD$, а также вписана в правильный тетраэдр, одна из граней которого совпадает с боковой гранью пирамиды $SABCD$. Найти радиус сферы, если объем пирамиды $SABCD$ равен 64. (Билет 5, 1992)

5.18. Сфера вписана в правильную треугольную пирамиду $SABC$ (S — вершина), а также вписана в прямую треугольную призму $KLMK'L'M'$, у которой $KL = KM = \sqrt{6}$, а боковое ребро KK' лежит на прямой AB. Найти радиус сферы, если известно, что прямая SC параллельна плоскости $LL'M'M$. (Билет 6, 1992)

5.19. Сфера вписана в четырехугольную пирамиду $SKLMN$, основанием которой является трапеция $KLMN$, а также вписана в правильный тетраэдр, одна из граней которого совпадает с боковой гранью пирамиды $SKLMN$. Найти радиус сферы, если площадь трапеции $KLMN$ равна $3\sqrt{3}$. (Билет 7, 1992)

5.20. Сфера вписана в правильную треугольную пирамиду $SKLM$ (S — вершина), а также вписана в прямую треугольную призму $ABCA'B'C'$, у которой $AB = AC$, $BC = 4\sqrt{2}$, а боковое ребро AA' лежит на прямой KL. Найти радиус сферы, если известно, что прямая SM параллельна плоскости $BB'C'C$. (Билет 8, 1992)

5.21. Основание прямой призмы $ABCA'B'C'$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $\angle ABC = 2\arcsin(3/5)$. Плоскость, перпендикулярная прямой $A'C$, пересекает ребра AC и $A'C'$ в точках D и E соответственно, причем $AD = AC/3$, $EC' = A'C'/3$. Найти площадь сечения призмы этой плоскостью. (Билет 9, 1992)

5.22. Основание прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ — равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $BC = 1$, $AD = 5$, $\angle BAD = \operatorname{arctg}(3/2)$. Плоскость, перпендикулярная прямой $A'D$, пересекает ребра AD и $A'D'$ в точках E и F соответственно, причем $AE = FD' = 5/3$. Найти площадь сечения призмы этой плоскостью. (Билет 10, 1992)

5.23. Основание прямой призмы $ABCA'B'C'$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = CB = 2$, $\angle ACB = 2\arcsin(4/5)$. Плоскость, перпендикулярная прямой $A'B$, пересекает ребра AB и $A'B'$ в точках K и L соответственно, причем $AK = \frac{7}{16}AB$, $LB' = \frac{7}{16}A'B'$. Найти площадь сечения призмы этой плоскостью. (Билет 11, 1992)

5.24. Основание прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ — равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $BC \| AD$, $BC = 5$, $AD = 10$, $\angle BAD = \operatorname{arctg} 2$. Плоскость, перпендикулярная прямой AD', пересекает ребра AD и $A'D'$ в точках M и N соответственно, причем $MD = A'N = 1$. Найти периметр сечения призмы этой плоскостью. (Билет 12, 1992)

5.25. Через середину ребра AC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) проведены плоскости α и β, каждая из которых образует угол $\frac{\pi}{6}$ с плоскостью ABC. Найти площади сечений пирамиды $SABC$ плоскостями α и β, если эти сечения имеют общую сторону длины 1, лежащую в грани ABC, а плоскость α перпендикулярна ребру SA. (Билет 1, 1993)

5.26. На сторонах BC и AD правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) взяты точки P и Q. Сечения пирамиды $SABCD$ двумя взаимно перпендикулярными плоскостями α и β, проходящими через прямую PQ, — трапеции с равными основаниями. Грань SAB образует угол $\frac{\pi}{4}$ с пересекающей ее плоскостью сечения, а угол между гранями SAB и $ABCD$ равен $\operatorname{arctg} 2$. Найти площади сечений пирамиды плоскостями α и β, если $PQ = 13$. (Билет 2, 1993)

5.27. Через середину ребра BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) проведены плоскости α и β, каждая из которых образует угол $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ с плоскостью ABC. Найти площади сечений пирамиды $SABC$ плоскостями α и β, если эти сечения имеют общую сторону длины 3, лежащую в грани ABC, а плоскость α перпендикулярна ребру SC. (Билет 3, 1993)

5.28. На сторонах AB и CD правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) взяты точки K и Z. Сечения пирамиды $SABCD$ двумя взаимно перпендикулярныи плоскостями α и β, проходящими через прямую KZ, — трапеции с равными основаниями. Грань SAD образует угол $\frac{\pi}{4}$ с пересекающей ее плоскостью сечения, а угол между гранями SAD и $ABCD$ равен $\operatorname{arctg} 3$. Найти площади сечений пирамиды $ABCD$ плоскостями α и β, если $KZ = 19$. (Билет 4, 1993)

5.29. Основание прямой призмы $KLMNK'L'M'N'$ — ромб $KLMN$ с углом 60° при вершине K. Точки E и F — середины ребер LL' и LM призмы. Ребро SA правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) лежит на прямой LN, вершины D и B — на прямых MM' и EF соответственно. Найти отношение объемов призмы и пирамиды, если $SA = 2AB$. (Билет 5, 1993)

5.30. Точки E и F — середины ребер CC' и $C'D'$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Ребро KL правильной треугольной пирамиды $KLMN$ (K — вершина) лежит на прямой AC, а вершины N и M — на прямых DD' и EF соответственно. Найти отношение объемов призмы и пирамиды, если $AB:BC = 4:3$, $KL:MN = 2:3$. (Билет 6, 1993)

5.31. Точки P и Q — середины ребер KL и LM правильной треугольной призмы $KLMK'L'M'$. Ребро SB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) лежит на прямой QK, а вершины A и C — на прямых $K'P$ и LL' соответственно. Найти отношение объемов призмы и пирамиды, если $SA = 5AB$. (Билет 7, 1993)

5.32. Основание прямой призмы $PQRP'Q'R'$ — треугольник PQR, в котором $\angle PQR = 90°$, $PQ:QR = 1:3$. Точка K — середина катета PQ. Ребро AB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ (A — вершина) лежит на прямой PR, а вершины C и D — на прямых $P'K$ и QQ' соответственно. Найти отношение объемов призмы и пирамиды, если $AB:CD = 2:3$. (Билет 8, 1993)

5.33. Внутри правильной треугольной пирамиды расположена прямая призма, в основании которой лежит ромб. Одна из граней призмы принадлежит основанию пирамиды, другая грань — боковой грани пирамиды. Какой наибольший объем может иметь призма, если ребро основания пирамиды равно 2, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$? (Билет 9, 1993)

5.34. Внутри правильной четырехугольной пирамиды расположена прямая призма $KLMNK'L'M'N'$, в основании которой лежит ромб $KLMN$ с углом 60° при вершине L. Ребро KK' принадлежит основанию пирамиды, а ребро LL' — диагонали этого основания. Какой наибольший объем может иметь призма, если диагональ основания пирамиды равна 6, а высота пирамиды равна $\sqrt{3}$? (Билет 10, 1993)

5.35. Внутри правильной треугольной пирамиды расположена прямая призма, в основании которой лежит ромб. Одна из граней призмы принадлежит основанию пирамиды, другая грань — боковой грани пирамиды. Какой наибольший объем может иметь призма, если ребро основания пирамиды равно 2, а высота пирамиды равна 1? (Билет 11, 1993)

5.36. Внутри правильной четырехугольной пирамиды расположена прямая призма $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит ромб $ABCD$, в котором $BD = \sqrt{2}AC$. Ребро AA' призмы принадлежит основанию пирамиды, а ребро BB' — диагонали этого основания. Какой наибольший объем может иметь призма, если ребро основания пирамиды равно 2, а высота пирамиды равна 1? (Билет 12, 1993)

5.37. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с углом BAD, равным $2 \arccos 1/3$. Сфера касается всех звеньев ломаной $ABCC_1A_1$ и пересекает ребро BB_1 в точках B_1 и M. Найти объем призмы и радиус сферы, если $B_1M = 1$. (Билет 1, 1994)

5.38. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB : BC = 2 : 3$. Точки F и F_1 — середины ребер BC и B_1C_1 соответственно. Сфера касается всех звеньев ломаной $AFDD_1A_1$ и пересекает отрезок F_1F в точках F_1 и E. Найти объем параллелепипеда и радиус сферы, если $F_1E = 3/2$. (Билет 2, 1994)

5.39. Сфера пересекает ребро CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках C_1 и K и касается всех звеньев ломаной $BCAA_1B_1$. Найти объем призмы и радиус сферы, если $C_1K = 4$. (Билет 3, 1994)

5.40. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB : BC = \sqrt{6}$. Точки K и K_1 — середины ребер AD и A_1D_1 соответственно. Сфера пересекает отрезок K_1K в точках K_1 и M и касается всех звеньев ломаной $CKBB_1C_1$. Найти объем параллелепипеда и радиус сферы, если $K_1M = 1$. (Билет 4, 1994)

5.41. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребро AB вдвое больше высоты пирамиды. По одну сторону от плоскости грани $ABCD$ расположен цилиндр, окружность основания которого проходит через центр этой грани. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SCD и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке C. Найти отношение объемов цилиндра и пирамиды. (Билет 5, 1994)

5.42. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ имеет длину $11/5$ и составляет с плоскостью основания ABC угол, равный $\operatorname{arctg}(5\sqrt{2}/4)$. Цилиндр расположен так, что окружность одного из его оснований проходит через середину ребра AC и не пересекает грань SAB. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке S. Найти объем цилиндра. (Билет 6, 1994)

5.43. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ двугранный угол при ребре AB равен $\arccos 1/3$. По одну сторону от плоскости грани $ABCD$ расположен цилиндр, окружность основания которого проходит через центр этой грани. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке B. Найти отношение объемов цилиндра и пирамиды. (Билет 7, 1994)

5.44. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна $\sqrt{7/3}$, а боковая грань составляет с основанием ABC угол $60°$. Цилиндр расположен так, что окружность одного из его оснований проходит через середину ребра BC и не пересекает грань SAC. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SAC — прямоугольники с общей вершиной в точке S. Найти объем цилиндра. (Билет 8, 1994)

5.45. Сфера, касающаяся верхнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его нижнего основания и делит ось цилиндра в отношении $2 : 6 : 1$, считая от центра одного из оснований. Найти объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии $2\sqrt{6}$ друг от друга. (Билет 9, 1994)

5.46. Сфера, касающаяся нижнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его верхнего основания и делит ось цилиндра в отношении $1 : 6 : 2$, считая от центра одного из оснований. Найти объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии 8 друг от друга. (Билет 10, 1994)

5.47. Сфера, касающаяся верхнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его нижнего основания и делит ось цилиндра в отношении $2:6:1$, считая от центра одного из оснований. Найти объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии $\sqrt{6}$ друг от друга. (Билет 11, 1994)

5.48. Сфера, касающаяся нижнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его верхнего основания и делит ось цилиндра в отношении $1:6:2$, считая от центра одного из оснований. Найти объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии 4 друг от друга. (Билет 12, 1994)

5.49. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 3\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 8. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку A, а другая — через точки B и D, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SC плоскости сечений? Найти расстояние между плоскостями сечений и объемы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями. (Билет 1, 1995)

5.50. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости ABC, $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle BAC = 120^\circ$, $SA = 3\sqrt{2}$. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку C и середину ребра AB, а другая — через точку B, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SA плоскости сечений? Найти объемы многогранников, на которые разбивают пирамиду плоскости сечений, а также расстояние между этими плоскостями. (Билет 2, 1995)

5.51. В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, ребро SD перпендикулярно плоскости основания, $SD = 6$, $BD = 3$, $AC = 2$. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку B, а другая — через точки A и C, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SD плоскости сечений? Найти расстояние между плоскостями сечений и объемы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями. (Билет 3, 1995)

5.52. Ребро SB пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости ABC, $AB = 4$, $BC = 2$, $\angle ACB = 90^\circ$, $SB = 3$. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку C и середину ребра AB, а другая — через точку A, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SB плоскости сечений? Найти объемы многогранников, на которые разбивают пирамиду плоскости сечений, а также расстояние между этими плоскостями. (Билет 4, 1995)

5.53. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно $\sqrt{14}$, длина стороны основания $ABCD$ призмы равна 6. Окружность основания прямого кругового конуса вписана в треугольник BC_1D, а вершина конуса лежит в плоскости ABC_1. Найти объем конуса. (Билет 5, 1995)

5.54. Окружность основания прямого кругового цилиндра вписана в боковую грань SAB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), центр другого основания цилиндра лежит в плоскости SBC. Найти объем цилиндра, если $AB = 6$, $SB = 5$. (Билет 6, 1995)

5.55. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $ABCD$ равна 2, боковое ребро равно $\sqrt{14}$. Основание прямого кругового конуса вписано в треугольник AB_1D_1, а вершина конуса лежит в плоскости AB_1C_1. Найти объем конуса. (Билет 7, 1995)

5.56. Окружность основания прямого кругового цилиндра вписана в боковую грань SBC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), центр другого основания цилиндра лежит в плоскости SBD. Найти объем цилиндра, если $BC = 4$, $SA = 3$. (Билет 8, 1995)

5.57. На ребре AC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка K так, что $AK = \frac{1}{4}$, $CK = \frac{3}{4}$. Через точку K проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{7}{6}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет. (Билет 9, 1995)

5.58. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 25$, $BC = 40$. На ребре AB взята точка M так, что $BM = 15$. Через точку M проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{11}{15}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет. (Билет 10, 1995)

5.59. На ребре AB правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка D так, что $AD = \frac{1}{3}$, $BD = \frac{2}{3}$. Через точку D проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{11}{4}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет. (Билет 11, 1995)

5.60. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$. На ребре BC взята точка D так, что $DC = 4$. Через точку D проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет. (Билет 12, 1995)

5.61. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$. Острые углы D_1DA и D_1DC равны между собой, угол между ребром D_1D и плоскостью основания призмы равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}$, а $CD = 5\sqrt{6}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найти длину BC, угол между плоскостями D_1DC и ABC, а также расстояние от точки D до центра сферы. (Билет 1, 1996)

5.62. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ касаются некоторого шара. Основанием призмы служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Угол C_1CD — острый, а $\angle C_1CB = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$. Найти $\angle C_1CD$, угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы, а также расстояние от точки C до точки касания шара с плоскостью AA_1D. (Билет 2, 1996)

5.63. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. Длина AB равна 8, а $\angle BAD = \pi/3$. Острые углы A_1AB и A_1AD равны между собой, а угол между ребром A_1A и плоскостью основания призмы равен $\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найти длину ребра AD, угол между плоскостями AA_1B и ABC, а также расстояние от точки A до центра сферы. (Билет 3, 1996)

5.64. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ касаются некоторого шара. Основанием призмы служит ромб $ABCD$. Угол B_1BC — острый, $\angle B_1BA = \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, а $AB = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. Найти $\angle B_1BC$, угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы, а также расстояние от точки B до точки касания шара с плоскостью D_1DC. (Билет 4, 1996)

5.65. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $DK = 2\,KC$. Найти:

1) расстояние от точки N до прямой AK;
2) расстояние между прямыми MN и AK;
3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MNK.

(Билет 1, 1996)

5.66. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка P расположена на ребре CD так, что $CP = 3PD$. Найти:

1) расстояние от точки F до прямой AP;
2) расстояние между прямыми EF и AP;
3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника EFP.

(Билет 6, 1996)

5.67. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $CK = 2KD$. Найти:

1) расстояние от точки N до прямой AK;
2) расстояние между прямыми MN и AK;
3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MKN.

(Билет 7, 1996)

5.68. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка P расположена на ребре CD так, что $PD = 3PC$. Найти:

1) расстояние от точки F до прямой AP;
2) расстояние между прямыми EF и AP;
3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника EFP.

(Билет 8, 1996)

5.69. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, лежащая на высоте BE треугольника ABC так, что $BE : OB = 3$. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B. (Билет 9, 1996)

5.70. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ABD, а вершина конуса расположена на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AB. Найти боковое ребро пирамиды и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой C. (Билет 10, 1996)

5.71. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, где OD — высота пирамиды. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B. (Билет 11, 1996)

5.72. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ABD, а вершиной конуса является точка O, лежащая на медиане CE треугольника ABC так, что $CE : OE = 4$. Найти боковое ребро пирамиды и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой C. (Билет 12, 1996)

5.73. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $\frac{3r}{2}$ так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем первые два равных шара касаются нижнего основания, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найти радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$. (Билет 1, 1997)

5.74. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $\frac{r}{2}$ так, что каждый шар касается двух других, нижнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра. (Билет 2, 1997)

5.75. Внутри цилиндра лежит шар радиуса r и два равных шара радиуса $\frac{3r}{2}$ так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем шар радиуса r касается нижнего основания цилиндра, а два других шара касаются верхнего основания цилиндра. Найти радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$. (Билет 3, 1997)

5.76. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $2r$ так, что каждый шар касается двух других, верхнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра. (Билет 4, 1997)

5.77. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро равно a и равно диагонали основания $ABCD$. Через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AD угол, равный $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и четырех прямых, которым принадлежат боковые ребра пирамиды. (Билет 5, 1997)

5.78. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найти площадь сечения куба плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и граней $ABCD$, BCC_1B_1 и DCC_1D_1. (Билет 6, 1997)

5.79. В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра, кроме SA, равны a, а ребро SA равно высоте треугольника ABC. Через точку A параллельно прямой BC проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P и радиус шара с центром на прямой, проходящей через точку S перпендикулярно плоскости треугольника ABC, касающегося плоскости P и плоскости треугольника SBC. (Билет 7, 1997)

5.80. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна a, боковое ребро AA_1 равно $a\sqrt{2}$. Через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\frac{\pi}{6}$. Найти площадь сечения призмы плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и граней $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и ADD_1A_1. (Билет 8, 1997)

5.81. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD взаимно перпендикулярны, $AD = BC$, расстояние от середины E ребра AB до плоскости ACD равно h, $\angle DAC = \frac{\pi}{2}$, $\angle ACD = \frac{\pi}{4}$, угол между ребром DC и гранью ABC равен $\frac{\pi}{6}$. Найти расстояние от точки E до плоскости BCD, угол между ребром AB и гранью ACD, а также угол между гранями ABD и ABC. (Билет 9, 1997)

5.82. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AC и BD взаимно перпендикулярны, $AB = BD = AD = a$, середина ребра AC равноудалена от плоскостей ABD и BCD, угол между ребром AC и гранью CBD равен $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найти длину ребра CD, угол CAD и угол между ребром BD и гранью ACD. (Билет 10, 1997)

5.83. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра BC и AD взаимно перпендикулярны, $AB = CD$, расстояние от середины O ребра BC до плоскости ABD равно h, $\angle CAD = \angle CDA = \frac{\pi}{6}$, угол между ребром AD и гранью ABC равен $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$. Найти расстояние от точки O до плоскости ACD, угол между ребром BC и гранью ABD, а также угол между гранями ABC и BCD. (Билет 11, 1997)

5.84. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и DC взаимно перпендикулярны, $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$, $\angle ABD = \frac{\pi}{6}$, угол между ребром CD и гранью ABD равен $\frac{\pi}{3}$, $AD = a$, середина ребра CD равноудалена от плоскостей ABD и ABC. Найти длину ребра BC, угол CDB и угол между ребром AB и гранью BCD. (Билет 12, 1997)

5.85. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6, а высота равна $\frac{3}{\sqrt{7}}$. На ребрах AC, A_1C_1 и BB_1 расположены соответственно точки P, F и K так, что $AP = 1$, $A_1F = 3$ и $BK = KB_1$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P, F и K. Найти площадь сечения и угол между плоскостью основания призмы и плоскостью сечения. (Билет 1, 1998)

5.86. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AB, A_1C_1, BB_1. Построить сечение призмы, найти площадь сечения и вычислить угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 2, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{7}}{7}$. (Билет 2, 1998)

5.87. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12, а высота равна $\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$. На ребрах AC, A_1C_1 и AB расположены соответственно точки P, F и E так, что $AP = 2$, $A_1F = 6$ и $AE = 6$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P, F и E, найти площадь сечения и угол между плоскостью основания призмы и плоскостью сечения. (Билет 3, 1998)

5.88. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AB, A_1C_1, BB_1. Построить сечение призмы, найти площадь сечения и вычислить угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 4, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{42}}{7}$. (Билет 4, 1998)

5.89. Две противоположные боковые грани четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $AB = 6$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Найти расстояние от точки D до плоскости SAB.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD, а вершина принадлежит грани SAB. Найти объем конуса. (Билет 5, 1998)

5.90. В основании четырехугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$, описанная около окружности и такая, что $KN = LM = 4$, $MN > KL$ и угол между прямыми KN и LM равен $\frac{\pi}{3}$. Две противоположные боковые грани этой пирамиды перпендикулярны основанию и $SM = 12$. Найти расстояние от точки M до плоскости SKL.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SMN, а вершина принадлежит грани SKL. Вычислить высоту конуса. (Билет 6, 1998)

5.91. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию, расстояние от вершины S до прямой AB равно $4\sqrt{2}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $CD = 2$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$. Найти расстояние от точки C до плоскости SAB. Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD, а вершина принадлежит грани SAB. Найти объем конуса. (Билет 7, 1998)

5.92. В основании четырехугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$ ($LM = KN$), описанная около окружности радиуса $\sqrt{3}$, $\angle MLK = \frac{2\pi}{3}$. Две противоположные боковые грани этой пирамиды перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Найти расстояние от точки N до плоскости SKL.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SMN, а вершина принадлежит грани SKL. Вычислить высоту конуса. (Билет 8, 1998)

5.93. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$, точка

F — центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F. (Билет 1, 1999)

5.94. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 3$, точка F — центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F. (Билет 2, 1999)

5.95. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 2 : 1$, точка F — центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F. (Билет 3, 1999)

5.96. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 3 : 1$, точка F — центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F. (Билет 4, 1999)

5.97. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна $2\sqrt{2}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $SF = 5DF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найти:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC. (Билет 5, 1999)

5.98. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, угол между боковым ребром и основанием равен $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $DF = 8SF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная AB. Найти:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC. (Билет 6, 1999)

5.99. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, длина бокового ребра равна $\sqrt{10}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $SE = 5AE$, $DF = 2SF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найти:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC (Билет 7, 1999)

5.100. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, двугранный угол между основанием и боковой гранью равен

$\arccos\frac{1}{3}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE=8ES$, $DF=2SF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная AB. Найти:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC. (Билет 8, 1999)

5.101. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, $\angle ADB = 2\,\mathrm{arctg}\,(3/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

(Билет 1, 2000)

5.102. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 6, угол между боковыми гранями равен $\arccos\,(1/10)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

(Билет 2, 2000)

5.103. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 3, угол между основанием и боковой гранью равен $\arccos\,(\sqrt{3}/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

(Билет 3, 2000)

5.104. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, высота пирамиды $DO=\sqrt{33}$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

(Билет 4, 2000)

5.105. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADC равен $2\arcsin\frac{1}{6}$, а сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины ребер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $3ME = KE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку KM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$. (Билет 5, 2000)

5.106. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADB равен $2\arcsin\frac{1}{3}$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины отрезков AB, DK, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $3ME = CE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку CM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$. (Билет 6, 2000)

5.107. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ длина бокового ребра равна 12, а угол между основанием ABC и боковой гранью равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{105}}$. Точки K, M, N — середины ребер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $2ME = KE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку KM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$. (Билет 7, 2000)

5.108. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 4, угол между плоскостью основания и боковой гранью равен $\arccos\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Точки K, M, N — середины отрезков AB, DK, AC соответственно. точка E лежит на отрезке CM и $5ME = CE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку CM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$. (Билет 8, 2000)

5.109. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $S \neq A$, $AB = BS$. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным? (Билет 1, 2001)

5.110. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным? (Билет 2, 2001)

5.111. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $AB = 2BS$, точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным? (Билет 3, 2001)

5.112. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F лежит на ребре CD и $2DF = FC$, точка S лежит на прямой AB, $AB = 3BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным? (Билет 4, 2001)

5.113. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $4\sqrt{3}$, $\angle DAB = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{37}{3}}$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;

3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1. (Билет 1, 2001)

5.114. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO = 6$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;

3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1. (Билет 2, 2001)

5.115. Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно $8\sqrt{10}$, $\angle ADB = \arcsin\frac{\sqrt{111}}{20}$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;

3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1. (Билет 3, 2001)

5.116. Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно 20, $\angle DAB = \arcsin\frac{\sqrt{13}}{5}$. Точка A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;

3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1. (Билет 4, 2001)

5.117. Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус шара, касающегося всех четырех шаров внешним образом. (Билет 5, 2001)

5.118. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найти радиус наименьшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом. (Билет 6, 2001)

5.119. Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении между r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус сферы, такой, что все четыре шара касаются ее внутренним образом. (Билет 7, 2001)

5.120. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найти радиус наибольшего из шаров, касающихся трех шаров трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом. (Билет 8, 2001)

5.121. Апофема правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро образует с основанием $ABCD$ угол, равный $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{SK}{KC} = \frac{1}{2}$. Найти:

1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2) расстояние от точки D до плоскости EFK;
3) угол между прямой SD и плоскостью EFK. (Билет 9, 2001)

5.122. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, боковое ребро образует с основанием угол, равный $\operatorname{arctg} 4$. Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3}$. Найти:

1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2) расстояние от точки D до плоскости EFK;
3) угол между прямой SD и плоскостью EFK. (Билет 10, 2001)

5.123. Высота правильной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 3, угол между соседними боковыми ребрами равен $\arccos\frac{9}{10}$. Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{CK}{SC} = \frac{1}{3}$. Найти:

1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2) расстояние от точки D до плоскости EFK;
3) угол между прямой SD и плоскостью EFK. (Билет 11, 2001)

5.124. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковая грань образует с основанием угол, равный $\operatorname{arctg} 2$. Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{CK}{KS} = 2$. Найти:

1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2) расстояние от точки D до плоскости EFK;
3) угол между прямой SD и плоскостью EFK. (Билет 12, 2001)

5.125. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SC и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность, причем периметр сечения равен $\frac{32}{5}$. Найти:

1) в каком отношении плоскость α делит ребра пирамиды;

2) отношение объемов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду;

3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α. (Билет 1, 2002)

5.126. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SB и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность, причем периметр сечения равен $\frac{48}{7}$. Найти:

1) в каком отношении плоскость α делит ребра пирамиды;

2) отношение объемов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду;

3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α. (Билет 2, 2002)

5.127. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SB и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность радиуса $\sqrt{15}/5$. Найти:

1) в каком отношении плоскость α делит ребра пирамиды;

2) отношение объемов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду;

3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α. (Билет 3, 2002)

5.128. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SC и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность радиуса $\sqrt{35}/7$. Найти:

1) в каком отношении плоскость α делит ребра пирамиды;

2) отношение объемов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду;

3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α. (Билет 4, 2002)

5.129. Расстояние от центра O шара радиуса 12, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до бокового ребра равно $4\sqrt{2}$. Найти:

1) высоту пирамиды;

2) расстояние от точки O до боковой грани пирамиды;

3) радиус вписанного в пирамиду шара. (Билет 5, 2002)

5.130. Расстояние от центра O шара радиуса $6\sqrt{2}$, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до боковой грани равно 3. Найти:

1) высоту пирамиды;
2) расстояние от точки O до бокового ребра пирамиды;
3) радиус вписанного в пирамиду шара. (Билет 6, 2002)

5.131. Расстояние от центра O шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды до бокового ребра, равно $2\sqrt{2}$, а от O до боковой грани равно $6/\sqrt{5}$. Найти:
1) высоту пирамиды;
2) радиус описанного вокруг пирамиды шара;
3) радиус вписанного в пирамиду шара. (Билет 7, 2002)

5.132. Расстояние от центра O шара радиуса 9, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до бокового ребра в $\sqrt{10}/3$ раз больше расстояния от точки O до боковой грани пирамиды. Найти:
1) высоту пирамиды;
2) расстояние от точки O до боковой грани пирамиды;
3) радиус вписанного в пирамиду шара. (Билет 8, 2002)

5.133. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 8, высота SO равна 3. Точка M — середина ребра SB, точка K — середина ребра BC. Найти:
1) объем пирамиды $AMSK$;
2) угол между прямыми AM и SK;
3) расстояние между прямыми AM и SK. (Билет 9, 2002)

5.134. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна $4\sqrt{2}$, угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. Точка M — середина ребра SD, точка K — середина ребра AD. Найти:
1) объем пирамиды $CMSK$;
2) угол между прямыми CM и SK;
3) расстояние между прямыми CM и SK. (Билет 10, 2002)

5.135. Диагональ основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна $8\sqrt{2}$, угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра AB. Найти:
1) объем пирамиды $DMSK$;
2) угол между прямыми DM и SK;
3) расстояние между прямыми DM и SK. (Билет 11, 2002)

5.136. Диагональ основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 8, высота пирамиды SO равна 1. Точка M — середина ребра SC, точка K — середина ребра CD. Найти:
1) объем пирамиды $BMSK$;
2) угол между прямыми BM и SK;
3) расстояние между прямыми BM и SK. (Билет 12, 2002)

5.137. Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA, DB и DC, а ее центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 3, объем пирамиды $ABCD$ равен $27\sqrt{2}$, ребро $AB = 24$. Найти двугранный угол между гранями ABC и ABD и радиус описанной около $ABCD$ сферы. (Билет 1, 2003)

5.138. Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA, DB и DC, а ее центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 2, двугранный угол между гранями ABC и ABD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, ребро $AB = 20$. Найти объем пирамиды $ABCD$ и радиус описанной около $ABCD$ сферы. (Билет 2, 2003)

5.139. Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA, DB и DC, а ее центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 2, объем пирамиды $ABCD$ равен $28\sqrt{2}$, ребро $AB = 12$. Найти двугранный угол между гранями ABC и ABD и радиус описанной около $ABCD$ сферы. (Билет 3, 2003)

5.140. Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA, DB и DC, а ее центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 4, двугранный угол между гранями ABC и ABD равен $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{6})$, ребро $AB = 24$. Найти объем пирамиды $ABCD$ и радиус описанной около $ABCD$ сферы. (Билет 4, 2003)

5.141. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся:

а) ребер BA, BB_1, BC и плоскости A_1DC_1;

б) ребер BA, BB_1, BC и прямой DA_1. (Билет 5, 2003)

5.142. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся:

а) ребер AD, DD_1, DC и плоскости A_1BC_1;

б) ребер AD, DD_1, DC и прямой BC_1. (Билет 6, 2003)

5.143. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся:

а) ребер AB, AA_1, AD и плоскости B_1CD_1;

б) ребер AB, AA_1, AD и прямой CD_1. (Билет 7, 2003)

5.144. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся:

а) ребер CB, CC_1, CD и плоскости B_1AD_1;

б) ребер CB, CC_1, CD и прямой AD_1. (Билет 8, 2003)

5.145. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Высота призмы равна $\sqrt{6}$. На сторонах AC, BC и A_1C_1 выбраны соответственно точки D, E и D_1 так, что $DC = \frac{AC}{4}$, $BE = CE$, $A_1D_1 = \frac{A_1C_1}{3}$, и через эти точки проведена плоскость П. Найти:

1) площадь сечения призмы плоскостью П;
2) угол между плоскостью П и плоскостью ABC;
3) расстояние от точек C_1 и C до плоскости П. (Билет 9, 2003)

5.146. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Высота призмы равна $\sqrt{6}$. На сторонах A_1C_1, B_1C_1 и AC выбраны соответственно точки D_1, E_1 и D так, что $C_1D_1 = \frac{A_1C_1}{4}$, $B_1E_1 = C_1E_1$, $AD = \frac{AC}{3}$, и через эти точки проведена плоскость П. Найти:
1) площадь сечения призмы плоскостью П;
2) угол между плоскостью П и плоскостью ABC;
3) расстояние от точек C_1 и C до плоскости П. (Билет 10, 2003)

5.147. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Высота призмы равна $\sqrt{6}$. На сторонах AC, BC и A_1C_1 выбраны соответственно точки D, E и D_1 так, что $AD = \frac{AC}{4}$, $AE = BE$, $C_1D_1 = \frac{A_1C_1}{3}$, и через эти точки проведена плоскость П. Найти:
1) площадь сечения призмы плоскостью П;
2) угол между плоскостью П и плоскостью ABC;
3) расстояние от точек A_1 и A до плоскости П. (Билет 11, 2003)

5.148. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Высота призмы равна $\sqrt{6}$. На сторонах A_1C_1, A_1B_1 и AC выбраны соответственно точки D_1, E_1 и D так, что $A_1D_1 = \frac{A_1C_1}{4}$, $A_1E_1 = B_1E_1$, $CD = \frac{AC}{3}$, и через эти точки проведена плоскость П. Найти:
1) площадь сечения призмы плоскостью П;
2) угол между плоскостью П и плоскостью ABC;
3) расстояние от точек A и A_1 до плоскости П. (Билет 12, 2003)

5.149. В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $5/2$, точка E — середина AB, а F — точка пересечения меднан грани BCD, причем $EF = 8$. Сфера радиуса 5 касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объем пирамиды $ABCD$. (Билет 1, 2004)

5.150. В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $8/3$, точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, причем $EF = 6$. Сфера радиуса 5 касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объем пирамиды $ABCD$. (Билет 2, 2004)

5.151. В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна 6, точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, причем $EF = 10$. Сфера радиуса $25/4$ касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями

ABD и BCD, площадь грани BCD и объем пирамиды $ABCD$. (Билет 3, 2004)

5.152. В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна 4/3, точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, причем $EF = 8$. Сфера радиуса 20/3 касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объем пирамиды $ABCD$. (Билет 4, 2004)

5.153. Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причем $SK = 5$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC. (Билет 5, 2004)

5.154. Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причем $SK = 3$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC. (Билет 6, 2004)

5.155. Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$ и $\sqrt{15}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причем $SK = 5$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC. (Билет 7, 2004)

5.156. Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$ и $\sqrt{14}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причем $SK = 7$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC. (Билет 8, 2004)

5.157. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1, середину ребра AD и параллельной прямой A_1C_1;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна. (Билет 9, 2004)

5.158. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину C, середину ребра A_1B_1 и параллельной прямой BD;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину C и параллельной прямой BD, у которой площадь проекции сечения на плоскость BDB_1 максимальна. (Билет 10, 2004)

5.159. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину D_1, середину ребра BC и параллельной прямой A_1C_1;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину D_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна. (Билет 11, 2004)

5.160. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра C_1D_1 и параллельной прямой BD;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину A и параллельной прямой BD, у которой площадь проекции сечения на плоскость BDB_1 максимальна. (Билет 12, 2004)

6. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

6.1. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_5 x + 4(1-a^2)\log_{25x} 5 - 2 = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше $24/5$?

(Билет 1, 1991)

6.2. Найти все значения параметра a, при которых расстояние между корнями уравнения

$$2\log_a x + 3\log_{ax^2} a + 5 = 0$$

меньше $6/25$. (Билет 2, 1991)

6.3. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_3 x + (a^2-4)\log_{3x}\frac{1}{3} - 3 = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 8? (Билет 3, 1991)

6.4. Найти все значения параметра a, при которых расстояние между корнями уравнения

$$\log_a x + 8\log_{ax^3} x - 3 = 0$$

меньше $3/2$. (Билет 4, 1991)

6.5. При каких значениях параметра α вершина параболы

$$y(x) = x^2 - (2\sqrt{5}\cos\alpha - 3)x - \frac{25}{4}\cos 4\alpha$$

лежит на прямой $y = 3x$, причем парабола пересекает ось OY в точке с отрицательной ординатой? (Билет 9, 1991)

6.6. Найти все значения параметра α, при которых парабола

$$y(x) = x^2 - 8\operatorname{ctg}\alpha\cdot x + 5\cos 2\alpha$$

касается прямой $y = -7$, причем абсцисса точки касания отрицательна. (Билет 10, 1991)

6.7. При каких значениях параметра α вершина параболы

$$y(x) = x^2 + (2\sin\alpha - \sqrt{3})x + \cos 4\alpha$$

лежит на прямой $y = -\sqrt{3}x$, причем парабола пересекает ось OY в точке с положительной ординатой? (Билет 11, 1991)

6.8. Найти все значения параметра α, при которых парабола

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 - 6\operatorname{tg}\alpha\cdot x - 10\cos 2\alpha.$$

касается прямой $y = -11$, причем абсцисса точки касания положительна. (Билет 12, 1991)

6.9. Числа x и y являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} ax + y = a + 1, \\ x + 4ay = 3, \end{cases}$$

где a — параметр. Какое наибольшее значение принимает выражение $x^2 - 6y^2$? При каком a это происходит? (Билет 5, 1992)

6.10. Числа x и y являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} -x + ay = 2a, \\ ax - y \; = \; 3a - 5, \end{cases}$$

где a — параметр. Какое наименьшее значение принимает выражение $x^2 + y^2$? При каком a это происходит? (Билет 6, 1992)

6.11. Числа x и y являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} ax + 9y = a + 3, \\ x + ay = 2, \end{cases}$$

где a — параметр. Какое наибольшее значение принимает выражение $3y^2 - x^2$? При каком a это происходит? (Билет 7, 1992)

6.12. Числа x и y являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x + ay = 3a, \\ ax + y = a + 4, \end{cases}$$

где a — параметр. Какое наименьшее значение принимает выражение $2x^2 + y^2$? При каком a это происходит? (Билет 8, 1992)

6.13. Числа $x \leqslant 0$, $y > 0$ — решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - 3y^2 = \dfrac{10p - p^2}{4p^2 + 9}, \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = \dfrac{10 - p}{4p^2 + 9}, \end{cases}$$

p — параметр.

При каких p выражение $x^2 + y^2$ принимает:

а) наибольшее значение;

б) наименьшее значение?

Вычислить эти значения. (Билет 5, 1993)

6.14. Числа $x \geqslant 0$, $y > 0$ — решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 9xy - 5y^2 = \dfrac{11p - 4p^2}{p^2 + 4}, \\ x^2 + 6xy + 5y^2 = \dfrac{11 - 4p}{p^2 + 4}, \end{cases}$$

p — параметр.

При каких p выражение $x^2 + y^2$ принимает:

а) наибольшее значение;

б) наименьшее значение?

Вычислить эти значения. (Билет 6, 1993)

6.15. Числа $x \geqslant 0$, $y > 0$ — решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 7xy + 6y^2 = \dfrac{p+5}{4p^2+1}, \\ 2x^2 + xy - 3y^2 = \dfrac{p^2+5p}{4p^2+1}, \end{cases}$$

p — параметр.

При каких p выражение $x^2 + y^2$ принимает:

а) наибольшее значение;

б) наименьшее значение?

Вычислить эти значения. (Билет 7, 1993)

6.16. Числа $x \leqslant 0$, $y > 0$ — решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = \dfrac{3-p}{p^2+4}, \\ 2x^2 - 7xy - 4y^2 = \dfrac{3p-p^2}{p^2+4}, \end{cases}$$

p — параметр.

При каких p выражение $x^2 + y^2$ принимает:

а) наибольшее значение;

б) наименьшее значение?

Вычислить эти значения. (Билет 8, 1993)

6.17. При каких значениях p каждое решение неравенства

$$\log_{x+1}(3 - px) > 0$$

удовлетворяет также неравенству

$$x^2 + \frac{2p-5}{2p}x - \frac{5}{2p} > 0\,?$$

(Билет 9, 1993)

6.18. При каких значениях p каждое решение неравенства

$$x^2 + (3 - 2p^2)x - 2p^2 + 2 < 0$$

удовлетворяет также неравенству

$$\log_{1-px}(x + 2) < 0\,?$$

(Билет 10, 1993)

6.19. При каких значениях p каждое решение неравенства

$$\log_{1-x}(2 + px) > 0$$

удовлетворяет также неравенству

$$x^2 + \frac{3-2p}{2p}x - \frac{3}{2p} > 0\,?$$

(Билет 11, 1993)

6.20. При каких значениях p каждое решение неравенства

$$8x^2+(12-2p^2)x-p^2+4<0$$

удовлетворяет также неравенству

$$\log_{1+px}(2x+2)<0\ ?$$

(Билет 12, 1993)

6.21. Найти все значения параметра α, $-\pi<\alpha<\pi$, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(4-x^2-y^2)(y^2-4x+28)=0,\\ x\cos\alpha+y\sin\alpha=2\end{cases}$$

имеет ровно три решения. (Билет 5, 1994)

6.22. Найти все значения параметра α, $-\pi<\alpha<\pi$, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(1-4x^2-4y^2)(4x^2+15-12y)=0,\\ y\cos\alpha+x\sin\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$$

имеет ровно три решения. (Билет 6, 1994)

6.23. Найти все значения параметра α, $-\pi<\alpha<\pi$, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x^2+y^2-9)\left(\frac{y^2}{12}+x+15\right)=0,\\ y\sin\alpha-x\cos\alpha=3\end{cases}$$

имеет ровно три решения. (Билет 7, 1994)

6.24. Найти все значения параметра α, $-\pi<\alpha<\pi$, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(9x^2+9y^2-1)(24y+9x^2+32)=0,\\ x\sin\alpha-y\cos\alpha=\frac{1}{3}\end{cases}$$

имеет ровно три решения. (Билет 8, 1994)

6.25. На координатной плоскости даны точки $A\,(0;2)$ и $B\,(4;3)$. При каких значениях параметра p, $p<5$, ближайшая к графику функции $y=\sqrt[4]{x+p}$ точка прямой AB лежит на отрезке AB? (Билет 9, 1994)

6.26. На координатной плоскости даны точки $A\,(2;-3)$ и $B\,(4;0)$. При каких значениях параметра p, $p>-5$, ближайшая к графику функции $y=\sqrt{x^3}+p$ точка прямой AB лежит на отрезке AB? (Билет 10, 1994)

6.27. На координатной плоскости даны точки $A(-4;2)$ и $B(0;3)$. При каких значениях параметра p, $p<8$, ближайшая к графику функции $y=\sqrt[4]{x+p}$ точка прямой AB лежит на отрезке AB? (Билет 11, 1994)

6.28. На координатной плоскости даны точки $A(2;0)$ и $B(4;3)$. При каких значениях параметра p, $p>-2$, ближайшая к графику функции $y=\sqrt{x^3}+p$ точка прямой AB лежит на отрезке AB? (Билет 12, 1994)

6.29. Найти все значения параметра p, при которых сумма всех корней уравнения

$$\left(x-\frac{9}{4}p\right)^4-4p(p-1)\left(x-\frac{9}{4}p\right)^2-p^3(2p-3)=0$$

меньше $-5p^2+11p+7$. (Билет 1, 1995)

6.30. Найти все значения параметра p, при которых сумма всех корней уравнения

$$(x-3p)^4+2p(p-5)(x-3p)^2-2p^2(p^2-9)=0$$

меньше $-2p^2+15p+5$. (Билет 2, 1995)

6.31. Найти все значения параметра p, при которых сумма всех корней уравнения

$$(x-12p)^4-6p(p-1)(x-12p)^2+p^3(p+4)=0$$

меньше $-p^2+48p+25$. (Билет 3, 1995)

6.32. Найти все значения параметра p, при которых сумма всех корней уравнения

$$\left(x-\frac{7}{4}p\right)^4+2p(p-7)\left(x-\frac{7}{4}p\right)^2-p^2(p^2-25)=0$$

меньше $-2p^2+14p+9$. (Билет 4, 1995)

6.33. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7}\leqslant a$$

является верным при всех значениях x. (Билет 5, 1996)

6.34. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}\geqslant a$$

является верным при всех значениях x. (Билет 6, 1996)

6.35. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1}\leqslant a$$

является верным при всех значениях x. (Билет 7, 1996)

6.36. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16}\geqslant a$$

является верным при всех значениях x. (Билет 8, 1996)

6.37. Найти все значения a, при которых уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни, а числа $\frac{1-4a}{27a^4}$ являются целыми.

(Билет 5, 1998)

6.38. Найти все значения a, при которых уравнение $\cos x = (6a-2)^2$ имеет корни, а числа $\frac{1-6a}{32a^3}$ являются целыми.

(Билет 6, 1998)

6.39. Найти все значения a, при которых уравнение $\sin x = (2a-2)^2$ имеет корни, а числа $\frac{16(1-2a)}{27a^4}$ являются целыми.

(Билет 7, 1998)

6.40. Найти все значения a, при которых уравнение $\cos x = (3a-4)^2$ имеет корни, а числа $\frac{27(1-a)}{4a^3}$ являются целыми.

(Билет 8, 1998)

6.41. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{4x}(1+ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение. (Билет 1, 2000)

6.42. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{2x}(1-ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение. (Билет 2, 2000)

6.43. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{9x}(1+ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение. (Билет 3, 2000)

6.44. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{x-1}(x-a) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение. (Билет 4, 2000)

6.45. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3$ имеет единственное решение. (Билет 5, 2000)

6.46. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = 3 - ax - 7a$ имеет единственное решение. (Билет 6, 2000)

6.47. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-8} = ax - 3a - 2$ имеет единственное решение. (Билет 7, 2000)

6.48. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение. (Билет 8, 2000)

6.49. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_5 (x+\sqrt{2-a}) + \log_{1/5} (a-1-x) = \log_{25} 9$$

имеет решение. (Билет 9, 2001)

6.50. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_3 (x+\sqrt{5-a}) + \log_{1/3} (a-2-x) = \log_9 4$$

имеет решение. (Билет 10, 2001)

6.51. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_2 (x+\sqrt{3-a}) + \log_{1/2} (a+1-x) = \log_4 9$$

имеет решение. (Билет 11, 2001)

6.52. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_4 (x+\sqrt{4-a}) + \log_{1/4} (a+2-x) = \log_{16} 9$$

имеет решение. (Билет 12, 2001)

6.53. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_2 (3-x+y)+3 = \log_2 (25-6x+7y), \\ y+2 = (x-2a)^2 + a + 2x. \end{cases}$$

имеет ровно два решения. (Билет 5, 2002)

6.54. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_3 (2-x-y)+2 = \log_3 (17-8x-10y), \\ (x-a)^2 + x = y + a + 6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения. (Билет 6, 2002)

6.55. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_2 (5x+7y+2) = \log_2 (x+2y+1)+2, \\ (y+2a)^2 + y = x + a + 1/2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения. (Билет 7, 2002)

6.56. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_3 (7x+4y-11) = \log_3 (2x+y-3)+1, \\ (y+a)^2 + x + y + a = 7 \end{cases}$$

имеет ровно два решения. (Билет 8, 2002)

6.57. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a+3-|x+2|)(a+x^2+4x) = 0$$

имеет:

1) ровно три корня;
2) ровно два корня. (Билет 9, 2002)

6.58. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a-6+|x-1|)(a-x^2+2x)=0$$

имеет:

1) ровно три корня;
2) ровно два корня. (Билет 10, 2002)

6.59. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a-2-|x+3|)(a+x^2+6x)=0$$

имеет:

1) ровно три корня;
2) ровно два корня. (Билет 11, 2002)

6.60. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a-3+|x+2|)(a-x^2-4x)=0$$

имеет:

1) ровно три корня;
3) ровно два корня. (Билет 12, 2002)

6.61. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+2|y|+|2y-3x|=12, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два действительных решения. (Билет 5, 2003)

6.62. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2|x|+|y|+|3x-4y|=10, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два действительных решения. (Билет 6, 2003)

6.63. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3|x|+|y|+|x+3y|=9, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два действительных решения. (Билет 7, 2003)

6.64. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2|x|+3|y|+|3x+2y|=11, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два действительных решения. (Билет 8, 2003)

6.65. Найти все значения a, при которых уравнение

$$4ax^2+(4a-3)x+a-14=0$$

имеет на отрезке [0, 1] единственный корень. (Билет 9, 2003)

6.66. Найти все значения a, при которых уравнение

$$3ax^2 + (6a - 5)x + 3a - 2 = 0$$

имеет на отрезке $[-3, 0]$ единственный корень. (Билет 10, 2003)

6.67. Найти все значения a, при которых уравнение

$$ax^2 + (2a - 5)x + a - 6 = 0$$

имеет на отрезке $[0, 2]$ единственный корень. (Билет 11, 2003)

6.68. Найти все значения a, при которых уравнение

$$ax^2 + (4a - 7)x + 4a - 5 = 0$$

имеет на отрезке $[-4, 0]$ единственный корень. (Билет 12, 2003)

6.69. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x - a \leqslant 0, \\ x^2 - 4x + 6a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (Билет 5, 2004)

6.70. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x + a \leqslant 0, \\ x^2 + 2x - 6a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (Билет 6, 2004)

6.71. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 + x - a \leqslant 0, \\ 3x^2 - 2x + 6a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (Билет 7, 2004)

6.72. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2a \leqslant 0, \\ x^2 + 4x - 4a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (Билет 8, 2004)

6.73. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_7 (7^x - \log_7 a) = 2x$$

имеет единственное решение. (Билет 9, 2004)

6.74. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_5 (25^x - \log_5 a) = x$$

имеет единственное решение. (Билет 10, 2004)

6.75. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_3 (3^x + \log_3 a) = 2x$$

имеет единственное решение. (Билет 11, 2004)

6.76. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_2 (4^x + \log_2 a) = x$$

имеет единственное решение. (Билет 12, 2004)

7. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

7.1. Числа $-\sin x$, $4\sin x\cdot\operatorname{ctg}2x$, $\cos x$ являются членами арифметической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найти все значения x и k, если седьмой член этой прогрессии равен $1/5$. (Билет 5, 1991)

7.2. Числа $\sqrt{2}\cos x$, $\sqrt{\cos 2x}$, $\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ являются членами геометрической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найти все значения x и k, если пятый член этой прогрессии равен $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$. (Билет 6, 1991)

7.3. Числа $2\cos x$, $-\sin x$, $(16/7)\cos x\cdot\operatorname{ctg}2x$ являются членами арифметической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найти все значения x и k, если пятнадцатый член этой прогрессии равен 2. (Билет 7, 1991)

7.4. Числа $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$, $\sqrt{-\cos 2x}$, $3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ являются членами геометрической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найти все значения x и k, если четвертый член этой прогрессии равен $\frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{5}}$. (Билет 8, 1991)

7.5. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;\,y)$ которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{xy}{15}}\geqslant y-2x,\\ \dfrac{x-25}{x^2+y^2-625}>\dfrac{1}{26}.\end{cases}$$

Изобразить фигуру M и найти ее площадь. (Билет 5, 1991)

7.6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;\,y)$ которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{16x^4-y^4}{6}}\geqslant xy,\\ y^2+25\geqslant 10y+\dfrac{1}{4}x^2,\\ x^2+y^2+10x\leqslant 0.\end{cases}$$

Изобразить фигуру M и найти ее площадь. (Билет 6, 1991)

7.7. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;\,y)$ которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{xy}{3}}\geqslant 2x-y,\\ \dfrac{y-8}{x^2+y^2-64}>\dfrac{1}{10}.\end{cases}$$

Изобразить фигуру M и найти ее площадь. (Билет 7, 1991)

7.8. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{5}{6}(y^4 - x^4)} \geqslant 2xy, \\ x^2 + y^2 + 4y \leqslant 0, \\ y^2 - 16 \leqslant x^2 - 8x. \end{cases}$$

Изобразить фигуру M и найти ее площадь. (Билет 8, 1991)

7.9. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + (b-4)y = 2, \\ (a-4)x + by = 3, \\ bx - (a+6)y = 3. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Изобразить фигуру Φ и составить уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку $(0;\ 7)$ и имеет с фигурой Φ единственную общую точку. (Билет 9, 1991)

7.10. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + 4y = 2, \\ bx + ay = -1, \\ (b+3)x + (a+8)y = -3, \end{cases}$$

имеет решение.

Изобразить фигуру Φ и составить уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку $(-6;\ 4)$ и имеет с фигурой Φ единственную общую точку. (Билет 10, 1991)

7.11. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} (a+2)x + by = 1, \\ ax + (b-2)y = 2, \\ (b+4)x - ay = 2, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Изобразить фигуру Φ и составить уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку $(10;\ 0)$ и имеет с фигурой Φ единственную общую точку. (Билет 11, 1991)

7.12. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + by = 1, \\ 3x + ay = -1, \\ (a-1)x + (b+2)y = -2, \end{cases}$$

имеет решение.

Изобразить фигуру Φ и составить уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку $(4; 3)$ и имеет с фигурой Φ единственную общую точку. (Билет 12, 1991)

7.13. Рассматриваются всевозможные параболы, симметричные относительно прямой $x = -2$ и касающиеся прямой $y = 1 - 8x$; ветви парабол направлены вверх. Найти уравнение той из них, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. (Билет 1, 1992)

7.14. Рассматриваются всевозможные параболы, касающиеся оси Ox и прямой $y = x/2 - 3$; ветви парабол направлены вниз. Найти уравнение той из них, для которой сумма расстояний от начала координат до точек пересечения параболы с осями координат минимальна. (Билет 2, 1992)

7.15. Рассматриваются всевозможные параболы, симметричные относительно прямой $x = 1$ и касающиеся прямой $y = -2x - 3$; ветви парабол направлены вниз. Найти уравнение той из них, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. (Билет 3, 1992)

7.16. Рассматриваются всевозможные параболы, касающиеся оси Ox и прямой $y = \frac{4}{3}x + 8$; ветви парабол направлены вверх. Найти уравнение той из них, для которой сумма расстояний от начала координат до точек пересечения параболы с осями координат минимальна. (Билет 4, 1992)

7.17. Два велосипедиста движутся по кольцевой велотрассе длины S, $1/5$ часть которой проходит по стадиону, а оставшаяся часть — по городским улицам. Скорость первого велосипедиста на стадионе равна v, а на городских улицах равна $16v/3$. Скорость второго велосипедиста на стадионе равна $4v$, а на городских улицах равна $16v/5$. Велосипедисты одновременно въезжают на стадион. Через какое время после этого один из них впервые совершит обгон другого? (Билет 1, 1992)

7.18. Автомобили «Вольво» и «Мерседес» движутся по кольцевой дороге, $1/3$ часть которой проходит по городу. Скорость «Вольво» в городе равна v, а за пределами города равна $3v/2$. Скорость «Мерседеса» в городе равна $3v/4$, а за пределами города равна $5v/3$. Автомобили одновременно въезжают в город. Через какое время один из них впервые совершит обгон другого, если длина городского участка кольцевой дороги равна S? (Билет 2, 1992)

7.19. Два лыжника бегут по кольцевой лыжне длины S, $1/6$ часть которой проходит по стадиону, а оставшаяся часть — по лесу. Скорость первого лыжника на стадионе равна v, а в лесу равна $5v$. Скорость второго лыжника на стадионе равна $8v/5$, а в лесу равна $4v$. Лыжники одновременно вбегают на стадион. Через какое время после этого один из них впервые совершит обгон другого? (Билет 3, 1992)

7.20. Автомобили «Рено» и «Крайслер» движутся по кольцевой дороге, $1/4$ часть которой проходит по городу. Скорость «Рено» в городе равна $2v$, а за пределами города равна $9v/4$. Скорость «Крайслера» в городе равна v, а за пределами города равна $3v$. Автомобили одновременно въезжают в город. Через какое время один из них впервые совершит обгон другого, если длина городского участка кольцевой дороги равна S? (Билет 4, 1992)

7.21. На берегу реки шириной $8l$ вниз по течению на расстоянии l друг от друга расположены пункты $П_0$, $П_1$, ..., $П_{100}$. От $П_0$ до $П_{100}$ со скоростью $6v$ и с остановками только в пунктах $П_0$, ..., $П_{100}$ идут автобусы, которые отправляются из $П_0$ один за другим с интервалом времени $l/10v$. Турист, находящийся на противоположном берегу реки напротив $П_0$, отплывает в лодке одновременно с отправлением из $П_0$ очередного автобуса. Доплыв по прямой до одного из пунктов, турист добирается до $П_{100}$ на автобусе. Скорость течения реки и скорость лодки в стоячей воде равны v. В какой пункт должен доплыть турист, чтобы затратить на весь путь до $П_{100}$ наименьшее время? Найти все решения. (Временем стоянки автобусов пренебречь). (Билет 9, 1992)

7.22. На берегу реки шириной $9l$ вниз по течению на расстоянии l друг от друга расположены пункты $П_0$, $П_1$, ..., $П_{40}$. От $П_{40}$ до $П_0$ со скоростью $8v$ и с остановками только в пунктах $П_{40}$, ..., $П_0$ идут дилижансы, которые отправляются из $П_{40}$ один за другим с интервалом времени $l/4v$. Путешественник, находящийся на противоположном берегу реки напротив $П_0$, отплывает в лодке одновременио с отправлением из $П_{40}$ очередного дилижанса. Доплыв по прямой до одного из пунктов, путешественник добирается до $П_0$ в дилижансе. Скорость течения реки и лодки в стоячей воде v. В какой пункт должен плыть путешественник, чтобы затратить на весь путь до $П_0$ наименьшее время? Найти все решения. (Временем стоянки дилижансов пренебречь). (Билет 10, 1992)

7.23. На берегу реки шириной $6l$ вниз по течению на расстоянии l друг от друга расположены пункты $П_0$, $П_1$, ..., $П_{100}$. От $П_0$ до $П_{100}$ со скоростью $5v$ и с остановками в пунктах $П_1$, ..., $П_{100}$ идут электрички, которые отправляются из $П_0$ одна за другой с интервалом времени $2l/11v$. Студент, находящийся на противоположном берегу реки напротив $П_0$, отплывает в лодке одновременно с отправлением из $П_0$ очередной электрички. Доплыв по прямой до одного из пунктов, студент добирается до $П_{100}$ в электричке. Скорость течения реки и скорость лодки в стоячей воде равны v. В какой пункт должен плыть студент, чтобы затратить на весь путь до $П_{100}$ наименьшее время? Найти все решения. (Временем стоянки электричек пренебречь). (Билет 11, 1992)

7.24. На берегу реки шириной $11l$ вниз по течению на расстоянии l друг от друга расположены пункты $П_0$, $П_1$, ..., $П_{25}$. От $П_{25}$ до $П_0$ со скоростью $4v$ и с остановками только в пунктах $П_{25}$, ..., $П_0$ идут кабриолеты, которые отправляются из $П_{25}$ один за другим с интервалом времени $l/3v$. Курьер, находящийся на противоположном берегу реки напротив

Π_0, отплывает в лодке одновременно с отправлением из Π_{25} очередного кабриолета. Доплыв по прямой до одного из пунктов, курьер добирается до Π_0 в кабриолете. Скорость течения реки и скорость лодки в стоячей воде равны v. В какой пункт должен плыть курьер, чтобы затратить на весь путь до Π_0 наименьшее время? Найти все решения. (Временем стоянки кабриолетов пренебречь). (Билет 12, 1992)

7.25. На координатной плоскости изображена фигура M, состоящая из точек, координаты $(x;\ y)$ которых таковы, что выражение

$$12 + 2^p\left(y - x^2 + \frac{9}{2}\right) - 2^{-p}(x^2 + 4x + y)$$

неотрицательно при всех p.

Из точки A проведены лучи a_1 и a_2, а из точки C — лучи c_1 и c_2, каждый из которых касается границы множества M. Лучи a_1 и c_1 пересекаются в точке B, а лучи a_2 и c_2 — в точке D, причем $ABCD$ — прямоугольник, одна из диагоналей которого параллельна оси Ox.

Изобразить на координатной плоскости фигуру M, найти координаты центра прямоугольника $ABCD$ и его площадь. (Билет 1, 1993)

7.26. На координатной плоскости изображена фигура M, состоящая из точек, координаты $(x;\ y)$ которых таковы, что выражение

$$4 + p^2(2y - x^2 + 14) - p^{-2}(x^2 + 4x + 2y)$$

неотрицательно при всех $p \neq 0$.

Из точки A проведены лучи a_1 и a_2, а из точки C — лучи c_1 и c_2, каждый из которых касается границы множества M. Лучи a_1 и c_1 пересекаются в точке B, а лучи a_2 и c_2 — в точке D, причем $ABCD$ — прямоугольник, одна из диагоналей которого параллельна оси Ox.

Изобразить на координатной плоскости фигуру M, найти координаты центра прямоугольника $ABCD$ и его площадь. (Билет 2, 1993)

7.27. На координатной плоскости изображена фигура M, состоящая из точек, координаты $(x;\ y)$ которых таковы, что выражение

$$8 + 5^{-p}(2y - x^2 + 26) - 5^p(x^2 + 4x + 2y)$$

неотрицательно при всех p.

Из точки A проведены лучи a_1 и a_2, а из точки C — лучи c_1 и c_2, каждый из которых касается границы множества M. Лучи a_1 и c_1 пересекаются в точке B, а лучи a_2 и c_2 — в точке D, причем $ABCD$ — прямоугольник, одна из диагоналей которого параллельна оси Ox.

Изобразить на координатной плоскости фигуру M, найти координаты центра прямоугольника $ABCD$ и его площадь. (Билет 3, 1993)

7.28. На координатной плоскости изображена фигура M, состоящая из точек, координаты $(x;\ y)$ которых таковы, что выражение

$$6 + \sqrt{p}\left(y - x^2 + \frac{21}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{p}}\,(x^2 + 4x + y)$$

неотрицательно при всех $p > 0$.

Из точки A проведены лучи a_1 и a_2, а из точки C — лучи c_1 и c_2, каждый из которых касается границы множества M. Лучи a_1 и c_1 пересекаются в точке B, а лучи a_2 и c_2 — в точке D, причем $ABCD$ — прямоугольник, одна из диагоналей которого параллельна оси Ox.

Изобразить на координатной плоскости фигуру M, найти координаты центра прямоугольника $ABCD$ и его площадь. (Билет 4, 1993)

7.29. Две параллельные касательные к графику функции $y = x^3 - 6$ пересекают оси координат: первая — в точках A и B, вторая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если известно, что она в четыре раза меньше площади треугольника COD. (Билет 9, 1993)

7.30. Две параллельные касательные к графику функции $y = \frac{1}{x} + 2$ пересекают оси координат: первая — в точках A и B, вторая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если известно, что она в 4 раза меньше площади треугольника COD. (Билет 10, 1993)

7.31. Две параллельные касательные к графику функции $y = x^3 + \frac{2}{3}$ пересекают оси координат: первая — в точках A и B, вторая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если известно, что она в 4 раза меньше площади треугольника COD. (Билет 11, 1993)

7.32. Две параллельные касательные к графику функции $y = \frac{1}{x} - 3$ пересекают оси координат: первая — в точках A и B, вторая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если известно, что она в 4 раза меньше площади треугольника COD. (Билет 12, 1993)

7.33. Корни уравнения

$$x^3 - (\log_{p/8} p)x^2 + \left|\frac{5}{2}\log_4 p\right| x - \frac{15}{8} = 0$$

являются длинами сторон некоторого треугольника, а корни уравнения

$$x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{p}\,x^2 + \frac{2p}{15}\,x - \frac{p}{p+14} = 0$$

— длинами высот этого же треугольника. Найти p и площадь треугольника. (Билет 1, 1994)

7.34. Корни уравнения

$$x^3 - \frac{32}{p}\,x^2 + \frac{5}{\sqrt{p}}\,x - \frac{15}{64} = 0$$

являются длинами сторон некоторого треугольника, а корни уравнения

$$x^3 - \frac{1}{3}\,|\log_2 p|\,x^2 + (\log_{8\sqrt{2}p} p)x - \frac{1}{11+\sqrt{p}} = 0$$

— длинами высот этого же треугольника. Найти p и площадь треугольника. (Билет 2, 1994)

7.35. Корни уравнения

$$x^3-\left(2\log_{p\sqrt{2}}\frac{p}{4}\right)x^2+\left|\log_2\frac{p}{4}\right|x-\frac{15}{8}=0$$

являются длинами сторон некоторого треугольника, а корни уравнения

$$x^3-\frac{1}{3p}x^2+\frac{1}{30p^2}x-\frac{1}{7p+1}=0$$

— длинами высот этого же треугольника. Найти p и площадь треугольника. (Билет 3, 1994)

7.36. Корни уравнения

$$x^3-\frac{2p^2}{25}x^2+\frac{p}{4}x-\frac{15}{64}=0$$

являются длинами сторон некоторого треугольника, а корни уравнения

$$x^3-\frac{1}{3}\left|\log_{\sqrt{5}}(5p)\right|x^2+\left(\frac{2}{15}\log_{p/\sqrt{5}}(5p)\right)x-\frac{1}{3p}=0$$

— длинами высот этого же треугольника. Найти p и площадь треугольника. (Билет 4, 1994)

7.37. При каких x числа $\arcsin(3^{-x})$ и $\operatorname{arctg}(5\cdot 3^x-7)$ являются величинами двух углов прямоугольного треугольника? (Билет 5, 1994)

7.38. При каких x числа $\arccos(4^{-x}/\sqrt{2})$ и $\operatorname{arcctg}(2\cdot 4^x-3)$ являются величинами двух углов прямоугольного треугольника? (Билет 6, 1994)

7.39. При каких x числа $\arcsin(2\cdot 7^{-x})$ и $\operatorname{arctg}(7^x-2)$ являются величинами двух углов прямоугольного треугольника? (Билет 7, 1994)

7.40. При каких x числа $\arccos(5^{-x}/\sqrt{5})$ и $\operatorname{arcctg}(3\cdot 5^x-2)$ являются величинами двух углов прямоугольного треугольника? (Билет 8, 1994)

7.41. В прямоугольном треугольнике ABC точка D — середина гипотенузы AB, а медианы треугольника пересекаются в точке E. Треугольник ABC расположен на координатной плоскости Oxy так, что точка A лежит на оси Oy, точка D симметрична точке C относительно оси Oy, а точки C, D и E лежат на графике функции $y=(x^2-5)^2$. Найти уравнение прямой CD и площадь треугольника ABC. (Билет 1, 1995)

7.42. Медианы прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) пересекаются в точке D. Треугольник ABC расположен на координатной плоскости Oxy так, что точка A лежит на оси Oy, начало координат O является серединой гипотенузы, а точки D и C лежат на графике функции $y=x(x-4)(x-8)$. Найти уравнение прямой OC и длину гипотенузы AB. (Билет 2, 1995)

7.43. В прямоугольном треугольнике KLM точка P — середина гипотенузы KM, а медианы треугольника пересекаются в точке Q. Треугольник KLM расположен на координатной плоскости

Oxy так, что точка K лежит на оси Oy, точка P симметрична точке L относительно оси Oy, а точки P, Q и L лежат на графике функции $y=(x^2-1)^2$. Найти уравнение прямой PL и площадь треугольника KLM. (Билет 3, 1995)

7.44. Медианы прямоугольного треугольника KLM ($\angle M=90°$) пересекаются в точке P. Треугольник KLM расположен на координатной плоскости Oxy так, что точка K лежит на оси Oy, начало координат O является серединой гипотенузы, а точки P и M лежат на графике функции $y=x(x-3)(x-5)$. Найти уравнение прямой OM и длину гипотенузы KL. (Билет 4, 1995)

7.45. Парабола Π_2 симметрична параболе Π_1 $y=ax^2$, $a<0$ относительно точки $N(b;\, ab^2)$, где $b>0$. Некоторая прямая пересекает каждую из парабол ровно в одной точке: Π_1 — в точке B_1, Π_2 — в точке B_2 так, что угол B_1B_2N — прямой. Касательная к параболе Π_1, проведенная в точке B_1, пересекает отрезок B_2N в точке L. Определить, в каком отношении точка L делит отрезок B_2N. Найти значения параметров a и b, при которых длина отрезка B_1L минимальна, если площадь треугольника B_1B_2N равна $\frac{1}{3}$. (Билет 5, 1995)

7.46. Парабола Π_2 симметрична параболе Π_1 $y=ax^2$, $a<0$ относительно точки $K(b;\, ab^2)$, где $b>0$. Некоторая прямая пересекает каждую из парабол ровно в одной точке: Π_1 — в точке B_1, Π_2 — в точке B_2 так, что угол B_1B_2K — прямой. Касательная к параболе Π_1, проведенная в точке K, пересекает отрезок B_1B_2 в точке L. Определить, в каком отношении точка L делит отрезок B_1B_2. Найти значения параметров a и b, при которых длина отрезка KL минимальна, если площадь треугольника B_1B_2K равна $\frac{1}{9}$. (Билет 6, 1995)

7.47. Парабола Π_2 симметрична параболе Π_1 $y=ax^2$, $a>0$ относительно точки $M(b;\, ab^2)$, где $b>0$. Некоторая прямая пересекает каждую из парабол ровно в одной точке: Π_1 — в точке A_1, Π_2 — в точке A_2 так, что угол A_1A_2M — прямой. Касательная к параболе Π_1, проведенная в точке A_1, пересекает отрезок A_2M в точке K. Определить, в каком отношении точка K делит отрезок A_2M. Найти значения параметров a и b, при которых длина отрезка A_1K минимальна, если площадь треугольника A_1A_2M равна 3. (Билет 7, 1995)

7.48. Парабола Π_2 симметрична параболе Π_1 $y=ax^2$, $a>0$ относительно точки $T(b;\, ab^2)$, где $b>0$. Некоторая прямая пересекает каждую из парабол ровно в одной точке: Π_1 — в точке A_1, Π_2 — в точке A_2 так, что угол A_1A_2T — прямой. Касательная к параболе

Π_1, проведенная в точке T, пересекает отрезок A_1A_2 в точке K. Определить, в каком отношении точка K делит отрезок A_1A_2. Найти значения параметров a и b, при которых длина отрезка TK минимальна, если площадь треугольника A_1A_2T равна $\frac{1}{4}$. (Билет 8, 1995)

7.49. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{y-x}(2y-2xy) \leqslant 2, \\ |x| \leqslant 4-y. \end{cases}$$

Изобразить фигуру Ф и найти ее площадь. (Билет 9, 1995)

7.50. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{x^2+y^2-1}(xy) \geqslant \frac{1}{2}, \\ |x+y| \leqslant 3. \end{cases}$$

Изобразить фигуру Ф и найти ее площадь. (Билет 10, 1995)

7.51. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{y+x}(2xy+2x) \geqslant 2, \\ |x|+|y| \leqslant 2. \end{cases}$$

Изобразить фигуру Ф и найти ее площадь. (Билет 11, 1995)

7.52. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{x+y-2}(x^2+y^2-4) \geqslant 2, \\ |y-x| \leqslant 3. \end{cases}$$

Изобразить фигуру Ф и найти ее площадь. (Билет 12, 1995)

7.53. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=-2x^3-8ax^2-4a^2x+5$, $a<0$ и прямая l, заданная уравнением $y=4a^2x+5$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{2}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. Найти эту ординату. (Билет 1, 1996)

7.54. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=x^3+2ax^2+\frac{5}{4}a^2x+1$, $a<0$ и прямая l, заданная уравнением $y=\frac{a^2x}{4}+1$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{4}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату. (Билет 2, 1996)

7.55. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=6x^3+12ax^2+$ $+7a^2x-2$, $a>0$ и прямая l, заданная уравнением $y=a^2x-2$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $1/2$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с отрицательной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. Найти эту ординату. (Билет 3, 1996)

7.56. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=-x^3-4ax^2-$ $-3a^2x+2$, $a>0$ и прямая l, заданная уравнением $y=a^2x+2$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{1}{12}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с отрицательной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату. (Билет 4, 1996)

7.57. Графику функции $y=x^3+ax^2+bx+c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x=2$. Касательные к этому графику в точке A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0;-1)$, а другая — через точку $(0;-5)$. Найти значения a, b и c. (Билет 1, 1997)

7.58. Графику функции $y=-x^3+ax^2+bx+c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x=-2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0;-2)$, а другая — через точку $(0;-6)$. Найти значения a, b и c. (Билет 2, 1997)

7.59. Графику функции $y=x^3+ax^2+bx+c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x=-2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0;1)$, а другая — через точку $(0;5)$. Найти значения a, b и c. (Билет 3, 1997)

7.60. Графику функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x = 2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0;\ 2)$, а другая — через точку $(0;\ 6)$. Найти значения a, b и c. (Билет 4, 1997)

7.61. К графику функции $y = \frac{x^2}{4} - x + \frac{9}{4}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y = \frac{5}{4} - 2\,|x + 2|$ в точках A и B. Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B и $C\left(-2;\ \frac{5}{4}\right)$, если $\angle CAB = 2 \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + \angle CBA$.

(Билет 5, 1997)

7.62. К графику функции $y = -\frac{x^2}{12} + x - \frac{16}{3}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y = 3\,|x + 6| - \frac{7}{3}$ в точках A и B. Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B и $C\left(-6;\ -\frac{7}{3}\right)$, если $\angle CAB = 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} + \angle CBA$.

(Билет 6, 1997)

7.63. К графику функции $y = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y = 1 - \frac{3}{2}\,|x + 1|$ в точках A и B. Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B и $C\,(-1;\ 1)$, если $\angle CAB = 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} + \angle CBA$.

(Билет 7, 1997)

7.64. К графику функции $y = -\frac{x^2}{6} - x - \frac{8}{3}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y = 3\,|x - 3| - \frac{7}{6}$ в точках A и B. Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B, и $C\left(3;\ -\frac{7}{6}\right)$, если $\angle CAB = 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} + \angle CBA$.

(Билет 8, 1997)

7.65. Пусть M — множество точек плоскости с координатами $(x;\ y)$ таких, что числа x, y и $6 - 2x$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры M.

Фигура Ф состоит из точек множества M таких, что неравенство $t^2 + 2tx + 4x - y > 0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найти площадь фигуры Ф. (Билет 9, 1997)

7.66. Пусть M — множество точек плоскости с координатами $(x;\ y)$ таких, что числа $3x$, $2y$ и $9 - y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры M.

Фигура Ф состоит из точек множества M таких, что неравенство $t^2+2t(x-2)+7-y>0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найти площадь фигуры Ф. (Билет 10, 1997)

7.67. Пусть M — множество точек плоскости с координатами $(x; y)$ таких, что числа $2x$, y и $3-x$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры M.

Фигура Ф состоит из точек множества M таких, что неравенство $t^2-2tx+2x-y+3>0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найти площадь фигуры Ф. (Билет 11, 1997)

7.68. Пусть M — множество точек плоскости с координатами $(x; y)$ таких, что числа $3x$, y и $18-2y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры M.

Фигура Ф состоит из точек множества M таких, что неравенство $t^2+2tx+4x+y-6>0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найти площадь фигуры Ф. (Билет 12, 1997)

7.69. Фигура M на плоскости (x, y) ограничена графиками функций $y=3e^{ax}$ и $y=7-2e^{-ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=9x+3$. Найти a и площадь фигуры M. (Билет 1, 1998)

7.70. Фигура M на плоскости (x, y) ограничена графиками функций $y=9e^{-ax}$ и $y=15-4e^{ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=-18x+9$. Найти a и площадь фигуры M. (Билет 2, 1998)

7.71. Фигура M на плоскости (x, y) ограничена графиками функций $y=2e^{ax}$ и $y=7-3e^{-ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=4x+2$. Найти a и площадь фигуры M. (Билет 3, 1998)

7.72. Фигура M на плоскости (x, y) ограничена графиками функций $y=4e^{-ax}$ и $y=12-5e^{ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=-12x+4$. Найти a и площадь фигуры M. (Билет 4, 1998)

7.73. График функции $y=x^3+ax^2+bx+c$, $c<0$ пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найти a, b, c если площадь треугольника AMN равна 1. (Билет 5, 1998)

7.74. График функции $y=-x^3+ax^2+bx+c$, $c<0$ пересекает ось ординат в точке M и имеет ровно две общие точки A и B с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке A, проходит через точку M. Найти a, b, c если площадь треугольника ABM равна 1. (Билет 6, 1998)

7.75. График функции $y=x^3+ax^2+bx+c$, $c>0$ пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке М, проходит через точку A. Найти a, b, c если площадь треугольника AMN равна 1. (Билет 7, 1998)

7.76. График функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$, $c > 0$ пересекает ось ординат в точке D и имеет ровно две общие точки A и B с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке B, проходит через точку D. Найти a, b, c, если площадь треугольника ABD равна 1. (Билет 8, 1998)

7.77. Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 2, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4(x + y - 1), \\ (y - 3x - 2)(3y - x + 2) \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы. (Билет 5, 1999)

7.78. Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 3, \\ x^2 + y^2 \geqslant 3(2y - 2x - 3), \\ (2x + y - 3)(x + 5y + 3) \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы. (Билет 6, 1999)

7.79. Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 4, \\ x^2 + y^2 \geqslant -8(x + y + 2), \\ (7y - x - 4)(3y - 5x + 12) \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы. (Билет 7, 1999)

7.80. Дана система неравенств:

$$\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 5, \\ x^2 + y^2 \geqslant 5(2x - 2y - 5), \\ (7x + 3y + 15)(x + 4y - 5) \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы. (Билет 8, 1999)

7.81. Дано число $a = 2^{2002} + 3^{2002}$. Найти последнюю цифру числа a и остаток от деления a на 11. (Билет 1, 2002)

7.82. Дано число $a = 3^{2002} + 7^{2002}$. Найти последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на 11. (Билет 2, 2002)

7.83. Дано число $a = 2^{2002} + 13^{2002}$. Найти последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на 11. (Билет 3, 2002)

7.84. Дано число $a = 2^{2002} + 7^{2002}$. Найти последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на 11. (Билет 4, 2002)

7.85. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4|x|, \\ |x| + |y| \geqslant 2, \\ x^2 - y^2 + 16 - 8x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы. (Билет 1, 2003)

7.86. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4|y|, \\ |x| + |y| \geqslant 2, \\ y^2 - x^2 + 16 - 8x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы. (Билет 2, 2003)

7.87. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4|x|, \\ |x| + |y| \geqslant 2, \\ x^2 - y^2 + 16 + 8x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы. (Билет 3, 2003)

7.88. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4|y|, \\ |x| + |y| \geqslant 2, \\ x^2 - y^2 + 16 + 8x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы. (Билет 4, 2003)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

1.1. $\left(2; -3; -\frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{5}{6}; 4; -\frac{3}{2}\right)$.

Решение. Складывая первое уравнение системы с третьим, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 6xz + 3x = 2z - 2, \\ xy + zy = 2z - 2x + 2, \\ zy + y = 2z + 1. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения x через z, а из третьего — y через z, подставим эти выражения во второе уравнение:

$$\begin{cases} x = \frac{2z-2}{6z+3}, & (1) \\ y = \frac{2z+1}{z+1}, & (2) \\ 10z^2 + 23z + 2 = 0. & (3) \end{cases}$$

Исходная система равносильна системе (1)—(3). Уравнение (3) имеет корни $z_1 = -\frac{4}{5}$, $z_2 = -\frac{3}{2}$. Подставляя найденные значения z в уравнения (1), (2), находим два решения исходной системы.

1.2. $\left(0; -1; \frac{1}{3}\right)$; $(-2; 3; -5)$.

1.3. $\left(-\frac{1}{2}; -1; \frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{5}{2}; 3; 2\right)$.

1.4. $\left(\frac{4}{3}; 5; \frac{7}{6}\right)$; $\left(\frac{4}{5}; -3; \frac{1}{2}\right)$.

1.5. $(-2; 0)$; $(-3; 3)$; $(-4; 2)$.

Указание. Решить каждое из уравнений системы как квадратное относительно x или y. Тогда исходная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x + 2y + 2)(x - y + 6) = 0, \\ (x + 2y - 3)(x + y + 2) = 0. \end{cases}$$

и равносильна совокупности четырех систем линейных уравнений.

1.6. $(0{,}5; -3)$, $(2; -4)$, $\left(\frac{3}{2}; -5\right)$.

1.7. $(3; -3)$, $(2; -4)$, $(0; -2)$.

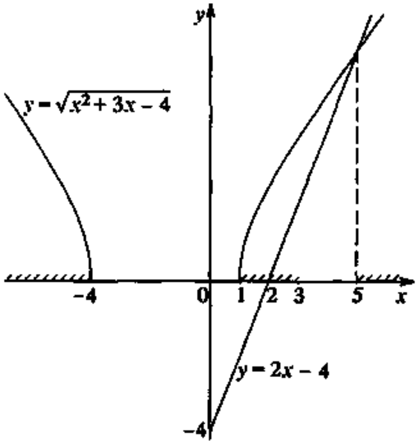
1.8. $(-3; 0{,}5)$, $(-4; 2)$, $(-5; 1{,}5)$.

1.9. $x \leqslant -2$, $3 \leqslant x < 5$, $x > 7$.

1.10. $x \leqslant -4$, $1 \leqslant x < 3$, $x > 5$.

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{4-2x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3}<0, \quad (1)$$



К задаче 1.10.

а неравенство (1) равносильно совокупности следующих двух систем неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+3x-4}<2x-4,\\ x>3,\end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+3x-4}>2x-4,\\ x<3.\end{cases} \quad (3)$$

Множество допустимых значений x для систем (2) и (3) определяется условием $x^2+3x-4\geqslant 0$, откуда $x\leqslant -4$, $x\geqslant 1$.

а) При $x>3$ обе части первого неравенства системы (2) положительны, а система (2) равносильна каждой из систем

$$\begin{cases}x^2+3x-4<4(x-2)^2,\\ x>3,\end{cases} \qquad \begin{cases}(x-5)\left(x-\frac{4}{3}\right)>0,\\ x>3,\end{cases}$$

откуда следует, что $x>5$.

б) Системе (3) удовлетворяют значения $x\leqslant -4$, так как при $x\leqslant -4$ левая часть первого неравенства системы (3) определена и неотрицательна, а правая отрицательна; значения $x\leqslant -4$ удовлетворяют и второму неравенству системы (3).

Значения x из отрезка $[1, 2]$ удовлетворяют системе (3), а при $x>2$ система (3) равносильна каждой из систем

$$\begin{cases}x^2+3x-4<4(x-2)^2,\\ 2<x<3,\end{cases} \qquad \begin{cases}(x-5)\left(x-\frac{4}{3}\right)<0,\\ 2<x<3,\end{cases}$$

откуда следует, что $2<x<3$.

Замечание. Системы (2) и (3) можно решить, построив графики функций $y=2x-4$ и $y=\sqrt{x^2+3x-4}$ (см. рис.).

1.11. $x\leqslant -1$, $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant \frac{5}{2}$, $x>\frac{7}{2}$.

1.12. $x\leqslant -4$, $6\leqslant x<10$, $x>14$.

1.13. $x_1=4$, $x_2=\frac{17+\sqrt{33}}{2}$.

1.14. $x=9$.

Решение. Полагая $x-2\sqrt{x}=t$, получаем уравнение $|t+2|+|t-1|=7$, откуда $t_1=-4$, $t_2=3$.

Если $t=-4$, то $x-2\sqrt{x}+4=0$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Если $t=3$, то $x-2\sqrt{x}-3=0$, откуда $x=9$.

1.15. $x_1=0$, $x_2=\frac{17+\sqrt{33}}{2}$, $x_3=1$.

1.16. $x=16$.

1.17. $x<\frac{15-\sqrt{290}}{4}$, $x\geqslant 4$.

1.18. $x<\frac{34-30\sqrt{2}}{23}$, $x\geqslant 3$.

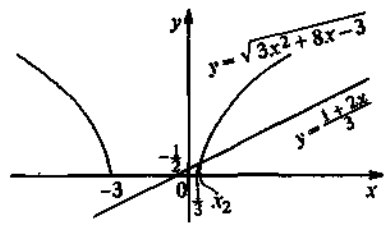
1.19. $x\leqslant -4$, $x>\frac{\sqrt{290}-15}{4}$.

1.20. $x\leqslant -3$, $x>\frac{30\sqrt{2}-34}{23}$.

Решение.

Так как уравнение $3x^2+8x-3=0$ имеет корни $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{3}$, то область E допустимых значений неравенства — совокупность интервалов $E_1=(-\infty,-3)$, $E_2=\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

Решить данное неравенство — это значит найти все значения $x\in E$, при которых график функции $y=\sqrt{3x^2+8x-3}$ лежит выше прямой $y=\frac{1+2x}{3}$ (см. рис.). Значения $x\in E_1$ является решением неравенства, так как $\sqrt{3x^2+8x-3}\geqslant 0$ при $x\leqslant -3$, а $\frac{1+2x}{3}<0$ при $x\leqslant -3$.



К задаче 1.20.

Пусть $x\geqslant\frac{1}{3}$, тогда $\sqrt{3x^2+8x-3}\geqslant 0$, $\frac{1+2x}{3}>0$ и исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $3x^2+8x-3>\left(\frac{1+2x}{3}\right)^2$, $23x^2+68x-28>0$. Уравнение $23x^2+68x-28=0$ имеет корни x_1 и x_2, где $x_1=-\frac{34+30\sqrt{2}}{23}<0$, $x_2=\frac{30\sqrt{2}-34}{23}$, $x_2>\frac{1}{3}$.

Поэтому решениями исходного неравенства на множестве E_2 являются все точки интервала $(x_2,+\infty)$.

1.21. $(4;\,27)$, $(2;\,-17)$, $(22;\,423)$, $(-16;\,307)$.

1.22. $(3;\,29)$, $(1;\,-17)$, $(13;\,397)$, $(-15;\,191)$.

1.23. $(-2;\,30)$, $(-4;\,4)$, $(20;\,316)$, $(-26;\,774)$.

1.24. $(-1;\,31)$, $(-3;\,3)$, $(21;\,339)$, $(-25;\,751)$

Решение.

Выразим y через x, получим:

$$y=\frac{x^3-3x^2-8x+27}{x+2}.$$

Выделим целую часть, преобразовав дробь:

$$y=\frac{x^3+2x^2-5(x^2+2x)+2(x+2)+23}{x+2}=x^2-5x+2+\frac{23}{x+2}.$$

Целые значения y примет при целых x тогда и только тогда, когда $\frac{23}{x+2}$ примет целые значения, т. е. в следующих случаях: $x+2=1$, $x+2=-1$, $x+2=23$, $x+2=-23$. Отсюда находим $x_1=-1$, $x_2=-3$, $x_3=21$, $x_4=-25$, а затем соответствующие значения y.

1.25. $(3; -2)$.

Решение. Сложив уравнения системы, получим

$$(x-3)^2+(y+2)^2=0,$$

откуда

$$x=3, \quad y=-2.$$

Пара чисел $x=3$, $y=-2$, как показывает проверка, образует решение системы.

1.26. $(1; -6)$.

1.27. $(2; -3)$.

1.28. $x=-5$, $y=1$.

1.29. $x=20$, $y=8$.

Решение. Умножая первое неравенство на 3 и складывая с третьим, получаем $7y<61$, откуда $y<8\frac{5}{7}$. Умножая второе неравенство на -3 и складывая с третьим, получаем $-5y<-32$, откуда $y>6\frac{2}{5}$. Итак, $6<y<9$. Исходной системе удовлетворяет только значение $y=8$ и тогда $x=20$.

1.30. $x=6$, $y=16$.

1.31. $x=7$, $y=19$.

1.32. $x=7$, $y=21$.

1.33. $0\leqslant x\leqslant\frac{8}{3}$, $x=\frac{10}{3}$, $4<x\leqslant 5$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями

$$3x^3-22x^2+40=3x\left(x-\frac{10}{3}\right)(x-4)\geqslant 0, \quad x\neq 4,$$

откуда

$$0\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}, \quad x>4.$$

Обозначим $f(x) = 3\left(x - \frac{10}{3}\right)(x - 4)$.

а) Пусть $x > 4$, тогда $f(x) > 0$. В этом случае исходное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств

$$\sqrt{x\,f(x)} \geqslant f(x), \quad \sqrt{x} \geqslant \sqrt{f(x)}, \quad x \geqslant f(x),$$

$$3x^2 - 23x + 40 = 3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x - 5) \leqslant 0,$$

откуда, учитывая условие $x > 4$, получаем $4 < x \leqslant 5$.

б) Пусть $0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$, тогда $x - 4 < 0$, $f(x) \geqslant 0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x\,f(x)} \leqslant f(x)$. Значение $x = \frac{10}{3}$ является решением этого неравенства, а если $0 \leqslant x < \frac{10}{3}$, то $f(x) > 0$ и неравенство примет вид

$$3x^2 - 23x + 40 = 3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x - 5) \geqslant 0,$$

откуда, с учетом условия $0 \leqslant x < \frac{10}{3}$, получаем $0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3}$.

1.34. $0 \leqslant x \leqslant 4$, $x = 5$, $6 < x \leqslant \frac{15}{2}$.

1.35. $0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$, $x = 4$, $5 < x \leqslant 6$.

1.36. $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $x = 6$, $\frac{15}{2} < x \leqslant 9$.

1.37. $(4;\ 2)$, $(-4;\ -2)$.

Решение: Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} = 16 + 2xy, & (1) \\ \dfrac{y^3}{x} = 50 - 6xy. & (2) \end{cases}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим уравнение

$$13(xy)^2 - 4xy - 800 = 0, \qquad (3)$$

которое вместе с одним из уравнений системы (1), (2) образует систему, равносильную системе (1), (2).

Из уравнения (3) находим

$$xy = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 10400}}{13} = \frac{2 \pm 102}{13}, \text{ т. е. } xy = 8 \text{ или } xy = -\frac{100}{3}.$$

Если $xy = 8$, то из уравнения (1) следует, что $x^4 = 2^8$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ и тогда $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

Если $xy = -\frac{100}{3}$, то $x^4 = -\frac{800}{169}$. Это уравнение не имеет действительных корней.

1.38. $(4; 2)$, $(-4; -2)$.

1.39. $(2; 4)$, $(-2; -4)$.

1.40. $(2; 4)$, $\left(\frac{256}{375}; -\frac{2048}{3825}\right)$.

1.41. $-2 \leqslant x < 2-\sqrt{2}$, $\frac{4}{3} < x \leqslant 3$.

Решение. Так как неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно каждому из неравенств $f^2(x) > g^2(x)$, $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) > 0$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -x^2+x+9 \geqslant 0, \\ (2x^2-8x+4)(-6x+8) > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Квадратный трехчлен $-x^2+x+6$ имеет корни -2 и 3, корнями квадратного трехчлена x^2-4x+2 являются числа $x_1 = 2-\sqrt{2}$ и $x_2 = 2+\sqrt{2}$, а система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) \leqslant 0, & (2)\\ (x-x_1)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-x_2) < 0, & (3) \end{cases}$$

где $-2 < x_1 < \frac{4}{3} < 3 < x_2$ (см. рис.).

К задаче 1.41.

Множество E_1 решений неравенства (2) — отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Множество E_2 решений неравенства (3), определяемое методом интервалов, является объединением интервалов $x < x_1$ и $\frac{4}{3} < x < x_2$, а множество решений системы (2), (3) — пересечение множеств E_1 и E_2 (см. рис.).

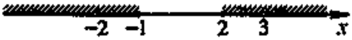
1.42. $1 \leqslant x < 2$, $2+\sqrt{3} < x \leqslant 6$.

1.43. $-5 \leqslant x < -2-\sqrt{2}$, $-\frac{4}{3} < x \leqslant -1$.

1.44. $-3 \leqslant x < -2$, $-2+\sqrt{3} < x \leqslant 1$.

1.45. $x < -2$, $x = -1$, $x > 3$.

Решение. Область E допустимых значений неравенства определяется условиями $x^2-x-2 = (x-2)(x+1) \geqslant 0$ и $\sqrt{x^2-x-2} \neq 2$,



К задаче 1.45.

т. е. E — объединение промежутков $x < -2$, $-2 < x \leqslant -1$, $2 \leqslant x < 3$, $x > 3$. Следовательно, E — внешность интервала $(-1, 2)$ с выброшенными точками -2 и 3 (см. рис.).

Рассмотрим два возможных случая: $2-\sqrt{x^2-x-2} < 0$ и $2-\sqrt{x^2-x-2} > 0$.

а) Пусть $2-\sqrt{x^2-x-2}<0$, т. е.

$$2<\sqrt{x^2-x-2}. \quad (1)$$

На множестве E неравенство (1) равносильно каждому из неравенств $4<x^2-x-2$, $(x+2)(x-3)>0$. Поэтому числа из промежутков $x<-2$ и $x>3$ — решения исходного неравенства, так как левая часть исходного неравенства отрицательна при условии (1), а правая положительна при всех x.

б) Пусть

$$2>\sqrt{x^2-x-2}. \quad (2)$$

Множество E_1 решений неравенства (2) — это множество решений системы

$$\begin{cases} x^2-x-2 \geqslant 0, \\ 4>x^2-x-2. \end{cases}$$

Следовательно, E_1 — объединение промежутков $(-2, 1]$ и $[2, 3)$. На множестве E_1 исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $2-\sqrt{x^2-x-2} \geqslant \sqrt{x^2+3}$,

$$2-\sqrt{x^2+3} \geqslant \sqrt{x^2-x-2}. \quad (3)$$

На множестве E_1 левая часть (3) отрицательна при $x \neq -1$ и равна нулю при $x=-1$. Правая часть (3) положительна при $x \in E_1$, $x \neq -1$ и равна нулю при $x=-1$. Следовательно, $x=-1$ — единственное решение исходного неравенства при выполнении условия (2).

1.46. $x<-1$, $x=0$, $x>4$.

1.47. $x<-4$, $x=-2$, $x>6$.

1.48. $x<-4$, $x=-3$, $x>1$.

1.49. $x_1=-6$, $x_2=4$.

Решение. Пусть $t=\sqrt{x^2+2x-8}$, тогда $2x^2+4x-23=2t^2-7$, и уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{2t^2-7}=t+1.$$

Возводя обе части полученного уравнения в квадрат, имеем

$$2t^2-7=t^2+2t+1, \text{ или } t^2-2t-8=0,$$

откуда $t_1=-2$, $t_2=4$.

Так как $t \geqslant 0$, то $\sqrt{x^2+2x-8}=4$, $x^2+2x-24=0$, $x_1=-6$, $x_2=4$. Числа x_1 и x_2 являются корнями исходного уравнения.

1.50. $x_1=6$, $x_2=-2$.

1.51. $x_1=-3$, $x_2=9$.

1.52. $x_1 = -6$, $x_2 = 10$.

1.53. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение. Складывая первое неравенство со вторым, умноженным на 3, находим $x^2-6xy+9y^2+6(x-3y)+9 \leqslant 0$, или $[(x-3y)+3]^2 \leqslant 0$, откуда $x-3y+3=0$. Подставляя $x=3y-3$ в исходную систему, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 9y^2-18y+9+9y^2-18y \leqslant 0, \\ 6y-6+3-2(3y-3)y \leqslant 0, \end{cases}$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} 2y^2-4y+1 \leqslant 0, \\ 2y^2-4y+1 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $2y^2-4y+1=0$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x=3y-3, \\ 2y^2-4y+1=0, \end{cases}$$

найдем два ее решения, которые являются решениями исходной системы неравенств.

1.54. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; 1-\sqrt{2}\right)$; $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}; 1+\sqrt{2}\right)$.

1.55. $\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right)$; $\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$.

1.56. $(-1+\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$; $(-1-\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$.

1.57. $x \leqslant -3$, $-2 \leqslant x < \frac{-7+\sqrt{13}}{6}$.

Решение. Область допустимых значений неравенства определяется условием $x^2+5x+6 \geqslant 0$, откуда

$$x \leqslant -3, \ x \geqslant -2. \tag{1}$$

На множестве (1) исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$x^2+5x+6 < 1+2\sqrt{x^2+x+1}+x^2+x+1,$$

$$2(x+1) < \sqrt{x^2+x+1}. \tag{2}$$

Если $x \leqslant -1$ и выполняются условия (1), то неравенство (2) является верным, и поэтому значения x из промежутков $x \leqslant -3$ и $-2 \leqslant x \leqslant -1$ — решения исходного неравенства.

Если левая часть (2) положительна и выполняются условия (1), т. е. $x > -1$, то неравенство (2) равносильно каждому из неравенств $4(x^2+2x+1) < x^2+x+1$,

$$3x^2+7x+3 < 0. \tag{3}$$

Так как уравнение $3x^2+7x+3=0$ имеет корни $x_1=\frac{-7-\sqrt{13}}{6}$, $x_2=\frac{-7+\sqrt{13}}{6}$, где $x_1<-1$, $x_2>-1$, то решения неравенства (3), удовлетворяющие условию $x>-1$, образуют интервал $-1<x<x_2$.

1.58. $x\leqslant -3$, $-1\leqslant x<\frac{-1+\sqrt{17}}{8}$.

1.59. $\frac{7-\sqrt{13}}{6}<x\leqslant 2$, $x\geqslant 3$.

1.60. $\frac{1-\sqrt{17}}{8}<x\leqslant 1$, $x\geqslant 3$.

1.61. $(0;\,0;\,0)$, $\left(\frac{5}{2};\,-5;\,-\frac{15}{2}\right)$, $(7;\,-7;\,-7)$.

Решение. Вычитая из второго уравнения, умноженного на два, первое и третье, получаем

$$y(z-x-2y)=0. \tag{1}$$

Уравнение (1) вместе с первыми двумя уравнениями данной системы образуют систему, равносильную данной. Из (1) следует, что либо $y=0$, либо

$$z=x+2y. \tag{2}$$

Если $y=0$, то $x=0$, $z=0$ и $(0;0;0)$ — решение исходной системы.

Если справедливо равенство (2), то из первых двух уравнений исходной системы получаем

$$\begin{cases} 9x+2y+xy=0, & (3)\\ 4x-3y-y^2=0. & (4)\end{cases}$$

Вычитая из уравнения (3), умноженного на 4, уравнение (4), умноженное на 9, находим

$$35y+4xy+9y^2=y(4x+9y+35)=0, \text{ откуда}$$

$$4x=-9y-35. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $y^2+12y+35=0$, откуда

$$y_1=-5,\ \ y_2=-7.$$

Если $y=-5$, то из (5) и (2) находим

$$x=\frac{5}{2},\ \ z=-\frac{15}{2},$$

а если $y=-7$, то $x=7$, $z=-7$.

1.62. $(0;\,0\,0)$, $\left(-\frac{3}{2};\,-\frac{1}{2};\,-1\right)$, $\left(-\frac{5}{6};\,-\frac{1}{6};\,-\frac{1}{2}\right)$.

1.63. $(0;\,0;\,0)$, $(4;\,12;\,-4)$, $(1;\,6;\,-4)$.

1.64. $(0;\ 0;\ 0)$, $\left(-\frac{4}{3};\ -2;\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{8};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$.

1.65. $x=-4$, $y=20$.

Решение. Пусть $u=\sqrt{x+y}$, $v=\sqrt{x+2y}$, тогда $x+y=u^2$, $x+2y=v^2$, откуда $x=2u^2-v^2$, $y=v^2-u^2$. Поэтому исходная система примет вид

$$\begin{cases} u+v=10, \\ u+3u^2-v^2=16, \end{cases}$$

откуда $2u^2+21u-116=0$, $u_1=-29/2$, $u_2=4$. Так как $u\geqslant 0$, то $u=4$, т. е. $\sqrt{x+y}=4$, $v=\sqrt{x+2y}=6$, откуда $x+y=16$, $x+2y=36$, $x=-4$, $y=20$.

1.66. $x=1/2$, $y=3/2$.

1.67. $x=13$, $y=-3$.

1.68. $x=1/7$, $y=-58/7$.

1.69. $x=4$, $y=-2$.

Решение. Так как $xy\neq 0$, то систему можно записать в виде

$$\begin{cases} y^2(x^2+y^3)=x(x^2+y^3), \\ x^2+y^3=-4y. \end{cases}$$

Если $x^2+y^3=0$, то из второго уравнения следует, что $y=0$. Если $y^2=x$, то из второго уравнения системы следует, что $y^3+y^2+4=0$ или $(y+2)(y^2-y+2)=0$, откуда $y=-2$ (уравнение $y^2-y+2=0$ не имеет действительных корней). Итак, $y=-2$, $x=y^2=4$.

1.70. $x=4$, $y=-2$.

1.71. $x=-2$, $y=1/4$.

1.72. $x=-2$, $y=1/4$.

1.73. $-18\leqslant x<-3$, $0<x<2$, $x>9$.

Решение. Так как $x^2+9x-162=(x+18)(x-9)$, то ОДЗ неравенства — совокупность двух промежутков $-18\leqslant x<2$, $x\geqslant 9$.

а) Если $-18\leqslant x<-9$ или $x>9$, то левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому указанные значения x являются решениями исходного неравенства. Число $x=-9$ также является решением этого неравенства, а число $x=9$ не есть решение неравенства.

б) Пусть $-9<x<0$, тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $\frac{x^2+9-162}{x-2}>(x+9)^2$, $x^2+9x-162>(x^2+18x+81)(x-2)$, $x^3+15x^2+36x>0$, $x(x+12)(x+3)>0$, откуда, с учетом условия $-9<x<0$, находим $-9<x<-3$.

в) Пусть $0\leqslant x<2$, тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $\sqrt{\frac{(x+18)(9-x)}{2-x}}>(9-x)$, $\sqrt{\frac{x+18}{2-x}}>\sqrt{9-x}$,

$\frac{x+18}{2-x} > 9 - x$, $x^2 - 12x < 0$, откуда с учетом условия $0 \leqslant x < 2$, получаем $0 < x < 2$.

1.74. $x < -10$, $-5/2 < x < 0$, $5/2 < x \leqslant 25$.

1.75. $-45 \leqslant x < -5$, $0 < x < 3$, $x > 15$.

1.76. $x < -9$, $-3/2 < x < 0$, $9/2 < x \leqslant 27/2$.

1.77. $(1; -2; 2)$, $\frac{1}{\sqrt[3]{13}}(5; 2; 6)$.

Решение. Складывая уравнения попарно, получим систему

$$\begin{cases} x^3 = xyz + 5, \\ y^3 = xyz - 4, \\ z^3 = xyz + 12, \end{cases}$$

равносильную исходной системе. Перемножим уравнения этой системы и обозначим $t = xyz$, тогда $t^3 = (t+5)(t-4)(t+12) = t^3 + 13t^2 - 8t - 240$, или $13t^2 - 8t - 240 = 0$, откуда $t_1 = -4$, $t_2 = \frac{60}{13}$.

Если $t = -4$, то $x^3 = 1$, $y^3 = -8$, $z^3 = 8$, откуда $x_1 = 1$, $y_1 = -2$, $z_1 = 2$.

Если $t = 60/13$, то $x^3 = \frac{125}{13}$, $y^3 = \frac{8}{13}$, $z^3 = \frac{216}{13}$, откуда $x_2 = \frac{5}{\sqrt[3]{13}}$, $y_2 = \frac{2}{\sqrt[3]{13}}$, $z_2 = \frac{6}{\sqrt[3]{13}}$.

1.78. $(-\sqrt[3]{9}; -\sqrt[3]{3}; -2)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

1.79. $(-2\sqrt[3]{4}; -3; 2\sqrt[3]{2})$, $\left(-2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; -2\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)$.

1.80. $\left(-\sqrt[3]{4}; -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}; \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)$.

1.81. $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{9}\right)$, $(12; -2)$.

Решение. Область определения уравнения — множество точек, таких, что

$$x \geqslant 2y, \quad y \neq 0, \quad x + \sqrt{x-2y} \geqslant 0. \qquad (1)$$

Первое уравнение системы преобразуем так:

$$2y + 6y^2 = x - y\sqrt{x-2y}, \quad (\sqrt{x-2y})^2 - y\sqrt{x-2y} - 6y^2 = 0,$$

$$(\sqrt{x-2y} - 3y)(\sqrt{x-2y} + 2y) = 0.$$

1) Если $\sqrt{x-2y}-3y=0$, то

$$\sqrt{x-2y}=3y,\quad y\geqslant 0. \tag{2}$$

Из (2) и второго уравнения системы получаем $\sqrt{x+3y}=(x+3y)-2$ или $(\sqrt{x+3y}-2)(\sqrt{x+3y}+1)=0$, откуда $\sqrt{x+3y}=2$, так как $\sqrt{x+3y}+1>0$. Тогда $x+3y=4$, $x=-3y+4$. Отсюда и из (2) находим $\sqrt{4-5y}=3y$, $9y^2+5y-4=0$, $y_1=-1$, $y_2=\frac{4}{9}$. Так как $y\geqslant 0$, то y_1 отбрасываем, а если $y=4/9$, то $x=\frac{8}{3}$.

Пара чисел $\left(\frac{8}{3};\frac{4}{9}\right)$ удовлетворяет условиям (1).

2) Если $\sqrt{x-2y}=-2y$, то $y\leqslant 0$ и $x-2y=4y^2$, а из второго уравнения находим $\sqrt{x-2y}=x+3y-2$. Поэтому $x+3y-2=-2y$, $x=2-5y$, $2-7y=4y^2$, $y_1=\frac{1}{4}$ (не годится), $y_2=-2$, $x_2=12$.

Пара чисел (12, −2) — решение исходной системы.

1.82. (6, 30), $\left(\frac{2-\sqrt{85}}{9};\frac{29-\sqrt{85}}{9}\right)$.

1.83. (42, 6), $\left(\frac{47+\sqrt{229}}{5};\frac{2+\sqrt{229}}{5}\right)$.

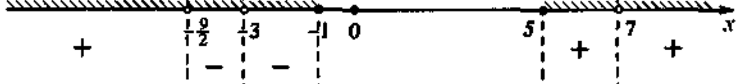
1.84. $\left(\frac{2}{9};\frac{10}{9}\right)$, $\left(-\frac{5+\sqrt{221}}{49};\frac{33+\sqrt{221}}{7}\right)$.

1.85. $-4-\sqrt{6}<x<-\frac{9}{2}$, $-3<x<\frac{-8+\sqrt{22}}{3}$, $5\leqslant x<7$.

Р е ш е н и е. Область определения неравенства — множество E точек x, удовлетворяющих условиям

$$x^2-4x-5\geqslant 0,\ \sqrt{x^2-4x-5}\neq 4,\ |x+2|\neq\frac{5}{2}.$$

Откуда следует, что E — множество точек, расположенных вне интервала (−1, 5), кроме точек $-\frac{9}{2}$, −3, 7.



К задаче 1.85.

На рисунке указаны знаки левой части исходного неравенства (над числовой прямой Ox) и правой части (под прямой Ox).

1) Пусть $x\in[5,7)$, тогда левая часть неравенства отрицательна, а правая положительна. Поэтому значения x из промежутка [5, 7) являются решениями исходного неравенства.

2) Пусть $x > 7$, тогда обе части исходного неравенства положительны, и оно равносильно (при $x > 7$) каждому из неравенств

$\sqrt{x^2-4x-5} > 2x+3$, $x^2-4x-5 > (2x+3)^2$, $3x^2+16x+14 < 0$,

откуда $x_1 < x < x_2$, где $x_1 = -\frac{8+\sqrt{22}}{3}$, $x_2 = \frac{-8+\sqrt{22}}{3}$ — корни уравнения $3x^2+16x+14=0$, которое является следствием уравнения

$$\sqrt{x^2-4x-5} = 2x+3. \qquad (1)$$

Так как $x_2 < 7$, то значения $x > 7$ не являются решениями исходного неравенства.

3) Пусть $x < -\frac{9}{2}$, тогда $|x+2| = -x-2$, обе части исходного неравенства положительны, и при $x < -\frac{9}{2}$ это неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\sqrt{x^2-4x-5} - 4 > -2(x+2) - 5,\ \sqrt{x^2-4x-5} > -2x-5,$$

$$x^2-4x-5 = (-2x-5)^2,\ x^2+8x+10 < 0,$$

откуда $x_3 < x < x_4$, где $x_3 = -4-\sqrt{6}$, $x_4 = -4+\sqrt{6}$ — корни уравнения $x^2+8x+10=0$, являющегося следствием уравнения

$$\sqrt{x^2-4x-5} = -2x-5. \qquad (2)$$

На промежутке $x < -\frac{9}{2}$ исходному неравенству удовлетворяют значения $x \in \left(x_3, -\frac{9}{2}\right)$.

4) Пусть $x \in \left(-\frac{9}{2}, -3\right)$, тогда левая часть неравенства положительна, а правая отрицательна. Поэтому значения x из интервала $\left(-\frac{9}{2}, -3\right)$ не являются решениями исходного неравенства.

5) Пусть $x \in (-3, -1]$. Тогда обе части неравенства отрицательны, и поэтому исходное неравенство в этом случае равносильно неравенству

$$\sqrt{x^2-4x-5} - 4 > 2|x+2| - 5.$$

Чтобы решить это неравенство, заменим его следующим равносильным неравенством

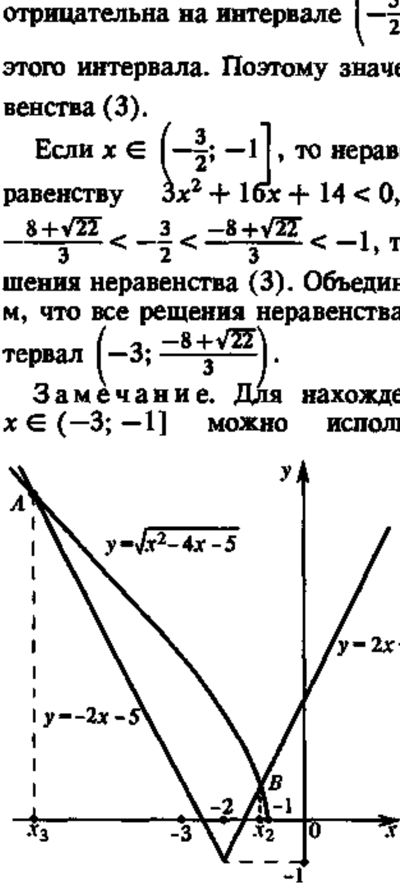
$$\sqrt{x^2-4x-5} > 2|x+2| - 1, \qquad (3)$$

левая часть которого неотрицательна, а правая меняет знак в точках $-\frac{5}{2}$ и $-\frac{3}{2}$.

Если $x \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right)$, то обе части неравенства (3) положительны, и оно равносильно (см. п. 3) на этом интервале неравенству $x^2 + 8x + 10 < 0$, откуда $x_3 < x < x_4$. Так как $-4 - \sqrt{6} < -3 < -\frac{5}{2} < -4 + \sqrt{6}$, то значения $x \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right)$ — решения неравенства (3). Если $x \in \left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$, то левая часть (3) положительна, а правая отрицательна на интервале $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$ и обращается в нуль на концах этого интервала. Поэтому значения $x \in \left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$ — решения неравенства (3).

Если $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right]$, то неравенство (3) равносильно (см. п. 2) неравенству $3x^2 + 16x + 14 < 0$, откуда $x_1 < x < x_2$. Так как $-\frac{8+\sqrt{22}}{3} < -\frac{3}{2} < \frac{-8+\sqrt{22}}{3} < -1$, то значения $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{-8+\sqrt{22}}{3}\right)$ — решения неравенства (3). Объединяя найденные промежутки, получаем, что все решения неравенства (3) при $x \in (-3; -1]$ образуют интервал $\left(-3; \frac{-8+\sqrt{22}}{3}\right)$.

Замечание. Для нахождения решений неравенства (3) при $x \in (-3; -1]$ можно использовать графики функций $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ и $y = 2|x + 2| - 1$ (см. рис.).



К задаче 1.85.

Из рисунка видно, что эти графики пересекаются в точках A и B с абсциссами x_3 и x_2 (это корни уравнений (2) и (1)). На интервале $(-3; x_2)$ график функции $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ лежит выше графика функции $y = 2|x + 2| - 1$. Поэтому значения $x \in (-3; x_2)$ — решения неравенства (3) на промежутке $(-3; -1]$.

1.86. $-6 < x < -4$, $\frac{11-\sqrt{22}}{3} < x < 4$, $\frac{11}{2} < x < 5 + \sqrt{6}$.

1.87. $-8 - \sqrt{6} < x < -\frac{17}{2}$, $-7 < x < \frac{-20+\sqrt{22}}{3}$, $1 \leqslant x < 3$.

1.88. $x < -4$, $-4 < x \leqslant -2$, $4 \leqslant x < 6$, $6 < x < \frac{15}{2}$, $x > \frac{15}{2}$.

1.89. $-\sqrt[3]{\frac{5}{12}} \leqslant x < \sqrt{2}$.

Решение. Пусть E — область определения неравенства. Тогда E — множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 76 - 12x^3 \geqslant 0, \\ 76 - x^3 \leqslant 81, \end{cases}$$

откуда следует, что $E = \left[-\sqrt[3]{\frac{5}{12}}, \sqrt[3]{\frac{19}{3}}\right]$. Так как $3 > \sqrt[3]{\frac{19}{3}}$, то на множестве E исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$9 - \sqrt{76 - 12x^3} < (3 - x)^2,$$

$$x(6 - x) < \sqrt{76 - 12x^3}. \qquad (1)$$

1) Значения $x \in E$, такие, что $x(6 - x) \leqslant 0$, т. е. числа $x \in \left[-\sqrt[3]{\frac{5}{12}}, 0\right]$ — решения исходного неравенства, так как в этом случае левая часть неравенства (1) неположительна, а правая принимает положительные значения.

2) Пусть $x \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{19}{3}}\right]$, тогда неравенство (1) равносильно каждому из неравенств $x^4 - 12x^3 + 36x^2 < 76 - 12x^3$, $x^4 + 36x^2 - 76 = (x^2 + 38)(x^2 - 2) < 0$, $x^2 < 2$, откуда $0 < x < \sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2} < \sqrt[3]{\frac{19}{3}}$, то множество решений неравенства (1) — интервал $(0, \sqrt{2})$.

1.90. $\left(\frac{1}{2}; -1; -1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 1; 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1; -1; \frac{1}{2}\right)$.

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$xy^2 + 4x^2z - 2yz^2 - 4xz^2 + 2x^2y - y^2z = 0.$$

Разложим левую часть этого уравнения на множители:

$$\begin{aligned} y^2(x - z) + 4xz(x - z) + 2y(x^2 - z^2) &= 0, \\ (x - z)[y(y + 2z) + 2x(y + 2z)] &= 0, \\ (x - z)(y + 2z)(y + 2x) &= 0. \qquad (1) \end{aligned}$$

Заметим, что исходная система, равносильная системе, состоящей из ее первого и третьего уравнений и уравнения (1), равносильна также совокупности трех систем, получаемых присоединением к первому и третьему уравнениям соответственно уравнений

$$x = z, \qquad (2)$$

$$y = -2z, \qquad (3)$$

$$y = -2x. \qquad (4)$$

1) Подставляя из (2) $x = z$ в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$x(y^2 - 5xy + 4x^2) = x(y - x)(y - 4x) = 0,$$
$$4xy - 4x^2 = 4x(y - x) = 3. \tag{5}$$

Если $x = 0$ или $y = x$, то из (5) следует, что $0 = 3$.

Если $y = 4x$, то из (5) находим $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{1}{2}$. В этом случае система имеет два решения:

$$\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right) \text{ и } \left(-\frac{1}{2}; -2; -\frac{1}{2}\right).$$

2) Подставляя $y = -2z$ (см. (3)) в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$z(2z^2 + 5xz + 2x^2) = z(z + 2x)(x + 2z) = 0,$$
$$-4z(z + 2x) = 3. \tag{6}$$

Если $z = 0$ или $z + 2x = 0$, то из (6) следует, что $0 = 3$. Если $x = -2z$, то из (6) находим $z^2 = \frac{1}{4}$, $z = \pm\frac{1}{2}$. В этом случае система имеет решения:

$$\left(1; 1; -\frac{1}{2}\right) \text{ и } \left(-1; -1; \frac{1}{2}\right).$$

3) Подставляя $y = -2x$ (см. (4)) в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$x(2x^2 + 5xz + 2z^2) = x(x + 2z)(z + 2x) = 0,$$
$$-4x(x + 2z) = 3. \tag{7}$$

Если $x = 0$ или $x + 2z = 0$, то из (7) следует, что $0 = 3$.

Если $z = -2x$, то из (7) находим $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{1}{2}$.

В этом случае система имеет два решения $\left(\frac{1}{2}; -1; -1\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}; 1; 1\right)$.

1.91. $-\sqrt[3]{\frac{31}{4}} \leqslant x < \sqrt{2}$.

1.92. $\left(\frac{1}{2}; 2; 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -2; -1\right)$, $(1; 1; -1)$, $(-1; -1; 1)$, $\left(\frac{1}{2}; -1; -2\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 1; 2\right)$.

1.93. $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x \leqslant -\sqrt[3]{\frac{5}{12}}$.

1.94. $\left(1;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;\ -1;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ -1;\ -1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 2;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -2;\ \frac{1}{2}\right)$.

1.95. $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{31}{4}}$.

1.96. $\left(2;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$, $\left(-2;\ -\frac{1}{2};\ -1\right)$, $\left(1;\ -\frac{1}{2};\ 2\right)$, $\left(-1;\ \frac{1}{2};\ -2\right)$, $(1;\ 1;\ -1)$, $(-1\ -1;\ 1)$.

1.97. $(-9;\ 81)$, $(-5;\ 5\sqrt{5})$, $(-5;\ -5\sqrt{5})$.

Решение. Второе уравнение исходной системы равносильно каждому из уравнений

$$x^2\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)=y\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right),$$

$$(x^2-y)\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)=0. \qquad (1)$$

а) Если $x^2=y$, то из первого уравнения исходной системы получаем $xy^2+4y^2+5y^2=0$, откуда следует, что либо $y=0$, либо $x=-9$. Но если $y=0$, то $x=0$, а при $x=0$ уравнение (1) теряет смысл. Итак, $x=-9$, $y=x^2=81$.

б) Если $x+\frac{y^2}{x^2}=0$, то $x^3+y^2=0$. Из первого уравнения системы находим $x^5+4x^4-5x^3=0$ или $x^2+4x-5=0$ $(x\neq 0)$, откуда $x_1=-5$, $x_2=1$. Пусть $x=-5$, тогда $y^2=125$, откуда $y=\pm 5\sqrt{5}$. Пусть $x=1$, тогда $y^2=-1$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Таким образом, система имеет три действительных решения: $(-9, 81)$, $(-5,\ 5\sqrt{5})$, $(-5;\ -5\sqrt{5})$.

1.98. $(-6, -7)$, $(-4;\ 3)$, $(4, -5)$.

Решение. Умножив исходное уравнение на 3, преобразуем полученное уравнение:

$$9xy+3\cdot 16x+3\cdot 13y+3\cdot 61=3y(3x+13)+16(3x+13)+$$
$$+3\cdot 61-16\cdot 13=(3x+13)(3y+16)-25=0.$$

Исходное уравнение равносильно следующему

$$(3x+13)(3y+16)=25 \qquad (1)$$

Так как делителями числа 25 являются числа ± 1, ± 5, ± 25, то множество всех целочисленных решений уравнения (1) содержится во множестве целочисленных решений следующих шести систем:

$$\begin{cases}3x+13=1,\\3y+16=25;\end{cases}\quad\begin{cases}3x+13=-1,\\3y+16=-25;\end{cases}\quad\begin{cases}3x+13=5,\\3y+16=5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x+13=-5,\\3y+16=-5;\end{cases}\quad\begin{cases}3x+13=25,\\3y+16=1;\end{cases}\quad\begin{cases}3x+13=-25,\\3y+16=-1;\end{cases}$$

Первая, четвертая и пятая из этих систем имеют целочисленные решения $(-4; 3)$, $(-6;7)$ и $(4; -5)$ соответственно. Остальные системы не имеют решений в целых числах.

1.99. $(125; 5)$, $(4\sqrt{2}; 2)$, $(-4\sqrt{2}; 2)$.

1.100. $(6, -5)$, $(4; 5)$, $(-4; -3)$.

1.101. $(3; 81)$, $(2; 8\sqrt{2})$, $(2; -8\sqrt{2})$.

1.102. $(-5, -8)$, $(-3; 2)$, $(5; -6)$.

1.103. $(-125; -5)$, $(9\sqrt{3}; -3)$, $(-9\sqrt{3}; -3)$.

1.104. $(-7, 5)$, $(-5; 5)$, $(3; 3)$.

1.105. $-3 \leqslant x < -2$, $-\frac{6}{5} < x < -1$, $1 < x < 2$.

Решение. Область определения неравенства — множество E значений x, удовлетворяющих условиям

$$x \neq 1,\ x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) \leqslant 0,\ \sqrt{6 - x - x^2} \neq 2.$$

Решив уравнение $\sqrt{6-x-x^2} = 2$, находим его корни $x = 1$, $x = -2$. Отсюда следует, что множество E — отрезок $[-3, 2]$ с выброшенными из него точками -2, -1, 1.

а) Пусть $x \in [-3, 1)$ и $x \neq -2$, тогда $|x+1| = -x-1$, и исходное неравенство примет вид

$$\frac{5}{6 - 3\sqrt{6-x-x^2}} > -\frac{1}{x^2+x}.$$

Полагая $x^2 + x = t$, получаем неравенство $\frac{5}{6-3\sqrt{6-t}} > -\frac{1}{t}$, которое равносильно неравенству

$$\frac{5t + 6 - 3\sqrt{6-t}}{6 - 3\sqrt{6-t}} > 0, \tag{1}$$

так как $t = x^2 + x \in (0, 6]$ при $x \in [-3, -1)$. Обозначим $\varphi(t) = 6 - 3\sqrt{6-t} = 3(2 - \sqrt{6-t})$, тогда

$$\varphi(t) < 0 \text{ при } t \in (0, 2) \text{ и } \varphi(t) > 0 \text{ при } t \in (2, 6].$$

Пусть $g(t) = 5t + 6 - 3\sqrt{6-t}$, и рассмотрим уравнение $g(t) = 0$, т. е. уравнение

$$5t + 6 = 3\sqrt{6-t}. \qquad (2)$$

Возводя обе части уравнения (2) в квадрат, получаем уравнение

$$25t^2 + 60t + 36 = 9(6-t)$$

или

$$25t^2 + 69t - 18 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3), являющееся следствием уравнения (2), имеет корни

$$t_1 = \frac{6}{25}, \ t_2 = -3, \text{ где } t_1 \in (0, 6], \text{ а } t_2 \notin (0, 6].$$

Если $t \in \left(0, \frac{6}{25}\right)$, то $g(t) < 0$, а если $t \in \left(\frac{6}{25}, 6\right]$, то $g(t) > 0$. Итак, функции $\varphi(t)$ и $g(t)$ принимают значения одного знака на промежутках $\left(0, \frac{6}{25}\right)$ и $(2, 6]$ и значения разных знаков на интервале $\left(\frac{6}{25}, 2\right)$. Поэтому множество решений неравенства (1) — совокупность промежутков $\left(0, \frac{6}{25}\right)$ и $(2, 6]$.

Если $x \in [-3, -1)$ и $t \in \left(0, \frac{6}{25}\right)$, т. е. $0 < x^2 + x < \frac{6}{25}$, то $x \in \left(-\frac{6}{5}, -1\right)$, а если $x \in [-3, -1]$ и $t \in (2, 6]$, т. е. $2 < x^2 + x \leqslant 6$, то $-3 \leqslant x < -2$.

Итак, если $x \in [-3, -1]$, то множество решений исходного неравенства — совокупность промежутков $[-3, -2)$ и $\left(-\frac{6}{5}, -1\right)$.

б) Пусть $-1 < x \leqslant 2$ и $x \neq 1$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{5}{6 - 3\sqrt{6 - x - x^2}} > \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}. \qquad (4)$$

Правая часть неравенства (4) положительна при $x > -1$, а левая часть отрицательна при $x \in (-1, 1)$ и положительна при $x \in (1, 2]$. Поэтому значения $x \in (-1, 1)$ не являются решениями неравенства (4). Пусть $x \in (1, 2]$. Обозначим $f(x) = \frac{5}{6 - 3\sqrt{6 - x - x^2}}$, $h(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$. Так как функция $\sqrt{6 - x - x^2}$ является убывающей на промежутке $(1, 2]$, то этим же свойством обладает функция $f(x)$. Функция $h(x)$ также является убывающей на промежутке $(1, 2]$, то этим же свойством обладает функция $f(x)$. Функция

$h(x)$ также является убывающей на промежутке $(1, 2]$, так как этим свойством обладают функции $\frac{1}{x+1}$ и $\frac{1}{x+2}$.

Отсюда следует, что если $x \in (1, 2]$, то

$$f(x) \geqslant f(2) = \frac{5}{6},\ g(x) < g(1) = \frac{5}{6},$$

и поэтому $f(x) > g(x)$ при $x \in (1, 2]$, т. е. значение $x \in (1, 2]$ — решения неравенства (4).

1.106. $-1 \leqslant x < 0$, $2 < x < \frac{11}{5}$, $3 < x \leqslant 4$.

1.107. $-2 \leqslant x < -1$, $1 < x < \frac{6}{5}$, $2 < x \leqslant 3$.

1.108. $-4 \leqslant x < -3$, $-1 < x < -\frac{4}{5}$, $0 < x \leqslant 1$.

1.109. $\left(\frac{7}{12}; -1; \frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{12}; 1; -\frac{5}{6}\right)$.

Решение. Обозначим $2x = u$, $-y = v$ и запишем исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} u + v - z = \dfrac{4}{u+v+z}, \\ v + z - u = \dfrac{2}{u+v+z}, \\ z + u - v = \dfrac{3}{u+v+z}. \end{cases} \tag{1}$$

Сложив уравнения системы (1) и обозначив $u + v + z = t$, получим уравнение $t = \frac{9}{t}$, откуда $t_1 = 3$, $t_2 = -3$.

Подставляя найденные значения суммы $u + v + z$ в систему (1), найдем искомые значения u, v, z.

Если $t = u + v + z = 3$, то $z = \frac{1}{2}\left(t - \frac{4}{t}\right) = \frac{5}{6}$,

$$u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{2}{t}\right) = \frac{7}{6},\ v = \frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{t}\right) = 1,$$

$$x = \frac{u}{2} = \frac{7}{12},\ y = -v = -1.$$

Аналогично, если $t = -3$, то $x = -\frac{7}{12}$, $y = 1$, $z = -\frac{5}{6}$.

1.110. $\left(-1; \frac{5}{18}; \frac{7}{6}\right)$, $\left(1; -\frac{5}{18}; -\frac{7}{6}\right)$.

1.111. $\left(\frac{5}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{6}; -\frac{7}{6}; \frac{1}{2}\right)$.

1.112. $\left(1; -\frac{7}{12}; \frac{5}{6}\right)$, $\left(-1; \frac{7}{12}; -\frac{5}{6}\right)$.

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Решение. Возводя в квадрат обе части уравнения, получаем

$$8 \sin x + \frac{13}{3} = 4 \cos^2 x + 8 \sin x + 4 \operatorname{tg}^2 x,$$

или

$$12 \cos^4 x - 25 \cos^2 x + 12 = 0,$$

откуда

$$\cos^2 x = \frac{3}{4},\ \cos^2 x = \frac{4}{3}.$$

Поскольку $\cos^2 x \leqslant 1$, то $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Непосредственная проверка показывает, что при $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ правая часть исходного уравнения отрицательна, и решениями являются лишь $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

2.2. $x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi k;\ x = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k,\ k \in Z.$

2.3. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z.$

2.4. $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k;\ x = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi k,\ k \in Z.$

2.5 $\frac{1}{6\sqrt{2}}.$

2.6. $\frac{1}{8}.$

2.7. $\frac{1}{3\sqrt{5}}.$

2.8. Нет решений.

2.9. $\begin{cases} x = \arccos\frac{2}{3} + 2\pi k, \\ y = (-1)^m \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi m, \end{cases} \begin{cases} x = -\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k, \\ y = (-1)^{m+1} \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi m, \end{cases}$

$$k \in Z,\ m \in Z.$$

2.10. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 4 + 2\pi k, \\ y = \arccos\frac{3}{4} + 2\pi m, \end{cases} \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 4 + (2k+1)\pi, \\ y = \arccos\frac{3}{4} + (2m+1)\pi, \end{cases}$

$$k \in Z,\ m \in Z.$$

2.11. $\begin{cases} x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k, \\ y = \pm\arccos\frac{\sqrt{15}}{10} + 2\pi m, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\arcsin\frac{4}{5} + (2k+1)\pi, \\ y = \pm\arccos\frac{\sqrt{15}}{10} + (2m+1)\pi, \end{cases}$

$$k \in Z,\ m \in Z.$$

2.12. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi m, \\ y = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} + 2\pi n, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + (2m+1)\pi, \\ y = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} + (2n+1)\pi, \end{cases}$

$$m \in Z,\ n \in Z.$$

2.13. $x = \pi n;$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

2.14. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Решение. Рассмотрим два случая: а)$\cos x \geqslant 0$, б)$\cos x < 0$.

а) $\cos 3x + \cos x = \sin 2x$, $2\cos x \cos 2x = \sin 2x$, $2\cos x(\cos 2x - \sin x) = 2\cos x(\cos 2x - \sin x) = 0$, откуда $\cos x = 0$, либо $1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$ и тогда $\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Отсюда, с учетом неравенства $\cos x \geqslant 0$, получаем: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

б) $\cos 3x - \cos x = \sin 2x$, $-2\sin x \sin 2x = \sin 2x$, $\sin 2x(1 + 2\sin x) = 0$, откуда $\sin 2x = 0$, либо $\sin x = -\frac{1}{2}$. Учитывая неравенство $\cos x < 0$, получаем: $x = \pi + 2\pi n$; $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Объединяя ответы в случаях а) и б), получаем:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x = \pi + 2\pi n;\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

2.15. $x = \pi n$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

2.16. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

2.17. $\frac{\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}$

Решение. Исходному будет равносильно уравнение

$$\sin 6x(\cos x - \sin x) = \cos 6x(\sin x + \cos x)$$

при условии $(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) \neq 0$, т.е. $\cos 2x \neq 0$. Имеем:

$$\sin 6x \cos x - \cos 6x \sin x = \cos 6x \cos x + \sin 6x \sin x,$$

$$\sin 5x = \cos 5x, \quad \operatorname{tg} 5x = 1, \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z.$$

Условиям $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\cos 2x \neq 0$ удовлетворяют $x = \frac{\pi}{20}$ и $x = \frac{9\pi}{20}$.

2.18. $-\frac{11}{30}\pi$.

2.19. $-\frac{\pi}{20}$; $-\frac{9\pi}{20}$.

2.20. $\frac{11}{30}\pi$.

2.21. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ x=\pi-\operatorname{arctg}5+2\pi n,\ n\in Z$

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\frac{7}{2}-3\sin^2 x=(\sin x+\cos x)^2, & (1)\\ \sin x+\cos x\geqslant 0. & (2)\end{cases}$$

Заменив $\frac{7}{2}$ на $\frac{7}{2}(\sin^2 x+\cos^2 x)$, из (1) получаем

$$\frac{1}{2}\sin^2 x+2\sin x\cos x-\frac{5}{2}\cos^2 x=0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg}x-5=0,\ \operatorname{tg}x=1,\ \operatorname{tg}x=-5.$$

Теперь, с учетом неравенства (2), находим ответ:

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad x=\pi-\operatorname{arctg}5+2\pi n,\ n\in Z.$$

2.22. $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi n,\ n\in Z.$

2.23. $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ x=\pi-\operatorname{arctg}3+2\pi n,\ n\in Z.$

2.24. $x=-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n,\ n\in Z.$

2.25. $x=\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$

2.26. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$

2.27. $x=\pi\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$

2.28. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=\pm\arccos\frac{5}{6}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$

2.29. $x=-\frac{\pi}{8}+2\pi k,\ x=-\frac{5\pi}{8}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$
$(x=-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)+2\pi k,\ x=\pi+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}).$

2.30. $x=-\frac{\pi}{8}+2\pi k,\ x=-\frac{5\pi}{8}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$

2.31. $x=-\frac{\pi}{8}+2\pi k,\ x=\frac{3\pi}{8}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$

2.32. $x=-\frac{\pi}{8}+2\pi k,\ x=\frac{3\pi}{8}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$

2.33. $x=\alpha+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z},\ \alpha\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right\}.$

2.34. $x=\alpha+2\pi n,\ \alpha\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{12},-\frac{7\pi}{12}\right\},\ n\in \mathbf{Z}.$

2.35. $x=\alpha+2\pi n,\ \alpha\in\left\{\pm\frac{\pi}{6},0,\pm\frac{3\pi}{4}\right\},\ n\in \mathbf{Z}.$

2.36. $x=\alpha+2\pi n,\ \alpha\in\left\{0,\pm\frac{\pi}{12},\pm\frac{3\pi}{4}\right\},\ n\in \mathbf{Z}.$

2.37. $n=105.$

2.38. $n=235.$

2.39. $n = 165$.

2.40. $n = 65$.

2.41. $x = \pi + 2\pi n$, $x = \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.42. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.43. $x = 2k\pi$, $x = \arccos \left(-\frac{3}{4}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.44. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = -\arcsin \frac{2}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.45. $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2};\ \pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Возводя в квадрат обе части первого уравнения и исключая из полученной системы y с помощью формулы $2\cos^2 y = \cos 2y + 1$, придем к уравнению $\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} - 2\sin 2x \cos^2 2x$, которое сводится к уравнению $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, являющемуся следствием исходной системы. Тогда из второго уравнения исходной системы получим $\cos 2y = 0$, откуда $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, т. к. $\cos y \leqslant 0$ в силу первого уравнения системы. Итак, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ и $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Из последних равенств находим x и y.

2.46. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.47. $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$, $y = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.48. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.49. 1) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $f_{\max} = 2$, $f_{\min} = 1$.

Решение. Используя тождества $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$, $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ и полагая $\sin^2 2x = t$, получаем $f(x) = \frac{1 - t/2}{1 - 3t/4} = \frac{2}{3}\frac{t-2}{t-4/3} = \frac{2}{3}\frac{(t-4/3)-2/3}{t-4/3} = \frac{2}{3} - \frac{9}{4}\frac{1}{t-4/3} = g(t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Функция $g(t)$ является возрастающей на отрезке $[0; 1]$, и поэтому $g_{\min} = g(0) = 1$, $g_{\max} = g(1) = 2$. Если $f(x) = \frac{10}{7}$, то $g(t) = \frac{10}{7}$, т. е. $\frac{2(t-2)}{3t-4} = \frac{10}{7}$, откуда $t = \frac{3}{4}$. Следовательно, $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$ или $\cos 4x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.50. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $f_{\max} = \frac{15}{7}$, $f_{\min} = \frac{3}{2}$.

2.51. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = \frac{1}{2}$.

2.52. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $f_{\max} = \frac{2}{3}$, $f_{\min} = \frac{7}{15}$.

2.53. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.54. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.55. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$

2.56. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Р е ш е н и е. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{\sin x}{\sin 4x} = \frac{1}{\cos 3x}, \tag{1}$$

а допустимые значения x для уравнения (1) определяются условием

$$\sin 4x \cos 3x \neq 0. \tag{2}$$

При выполнении условия (2) уравнение

$$\sin x \cos 3x = \sin 4x$$

является следствием уравнения (1) и равносильно уравнению

$$\sin 3x \cos x = 0. \tag{3}$$

Корнями уравнения (1) являются все те и только те корни уравнения (3), которые удовлетворяют условию (2).

Так как $\sin 3x = \sin x\,(3 - 4\sin^2 x) = \sin x\,(1 + 2\cos 2x)$, а $\sin x \cos x \neq 0$ в силу (2), то из (3) следует, что

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Корни уравнения (4) удовлетворяет условию (2) и являются корнями исходного уравнения.

2.57. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n + \pi k$, $y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n - \pi k$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.58. $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} + \pi n$,

$y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} - \frac{\pi k}{2} + \pi n$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Р е ш е н и е. Полагая $\sin x \cos y = u$, $\cos x \sin y = v$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 6u + 2v = -3, \\ 5u - 3v = 1, \end{cases}$$

откуда $u = -\frac{1}{4}$, $v = -\frac{3}{4}$.

Исходная система равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = -\frac{3}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin (x + y) = -1, \\ \sin (x - y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2.59. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi n + \pi k, \quad y = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \pi n + \pi k, \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

2.60. $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} + \pi k,$

$y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} - \pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.61. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.62. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

2.63. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.64. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение.

Пусть $t = \frac{\cos 3x}{\cos x}$.

а) Если $\cos x > 0$, то $t + \frac{2}{t} = -1$ или $t^2 + t + 2 = 0$.

Это уравнение не имеет действительных корней.

б) Если $\cos x < 0$, то $t - \frac{2}{t} = -1$ или $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Пусть $t = -2$, тогда $\frac{\cos 3x}{\cos x} = -2$ или $\frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x} = -2$.

Так как $\cos x \neq 0$, то $4\cos^2 x - 3 = 2$, $\cos^2 x = 1/4$, $\cos x = -1/2$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Пусть $t = 1$, тогда $4\cos^2 x - 3 = 1$, $\cos^2 x = 1$, $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$.

2.65. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Найдем решения неравенства на отрезке длиной 2π. Все значения x из интервала $(0, \pi)$ — решения неравенства, так как $\sin x > 0$ при $0 < x < \pi$, а левая часть неравенства определена и неотрицательна при всех x.

Пусть $\sin x \leq 0$, тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\frac{5 + 3\cos 4x}{8} > \sin^4 x, \quad 5 + 3\cos 4x > 2(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x),$$

$$\cos 2x\,(1 + \cos 2x) > 0, \quad \cos 2x > 0, \quad \sin^2 x < \frac{1}{2}, \quad |\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Так как $\sin x \leq 0$, то $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x \leq 0$, откуда $-\frac{\pi}{4} < x \leq 0$, $\pi \leq x < \frac{5\pi}{4}$.

Итак, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ решениями исходного неравенства являются все числа из интервала $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

2.66. $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2.67. $-\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2.68. $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2.69. $x=\pi n,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$

Решение. Уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)-\sin 3x}=1,\quad \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)}=1,$$

откуда $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0$ или $\sin x\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

Корни последнего уравнения удовлетворяют условию

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)\neq 0.$$

2.70. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$

2.71. $x=\pi n,\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$

2.72. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$

2.73. $x=-\frac{\pi}{9}+2\pi k,\ x=\frac{11}{9}\pi+2\pi k;\ x=\frac{4}{9}\pi+2\pi k,\ x=\frac{4}{3}\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Решение. а) Пусть $\cos 2x\geqslant 0$, тогда уравнение можно последовательно преобразовать так:

$$2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2-2\cos x,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=-\cos x,\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos x=0,$$

$$2\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0,$$

откуда получаем две серии корней

$$x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n,\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Корни первой серии при $n=3k+1$ не удовлетворяют условию $\cos 2x\geqslant 0$ и удовлетворяют этому условию при $n=3k$ и $n=3k+2$.

Для корней второй серии условие $\cos 2x\geqslant 0$ не выполняется

б) Пусть $\cos 2x<0$, тогда уравнение можно записать в виде

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos x=0\ \text{ или }\ 2\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0,$$

откуда

$$x=\frac{4\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n,\quad x=\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Корни первой из этих двух серий удовлетворяют условию $\cos 2x < 0$ только при $n = 3k$, а корни второй серии не удовлетворяют условию $\cos 2x < 0$.

2.74. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{7\pi}{18} + 2\pi n$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{29}{18}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.75. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{9} + 2\pi n$, $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{8\pi}{9} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.76. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.77. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Заметим, что

$$\sin 2x \neq 0 \tag{1}$$

и воспользуемся равенствами

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x} = \frac{\sin 8x \sin 6x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{16 \cos 4x \sin 2x \cos 2x \sin 6x}{\sin^2 2x},$$

$$\cos 2x \sin 6x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) = \frac{1}{2}\sin 4x\,(1 + 2\cos 4x) =$$
$$= \sin 2x \cos 2x\,(1 + 2\cos 4x).$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$\frac{16 \cos 4x \sin^2 2x \cos 2x\,(1 + 2\cos 4x)}{\sin^2 2x} = 16\cos 4x\,(1 + \cos 4x). \tag{2}$$

Уравнение (2) при условии (1) равносильно уравнению

$$\cos 4x\,(1 + 2\cos 4x)\cos 2x = \cos 4x\,(1 + 2\cos 4x), \tag{3}$$

а уравнение (3) равносильно совокупности уравнений

$$\cos 4x = 0, \tag{4}$$

$$\cos 4x = -\frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\cos 2x = 1. \tag{6}$$

Уравнения (4) и (5) имеют корни $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$ и $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ соответственно, и эти корни удовлетворяют условию (1), а из (6) следует, что $\sin 2x = 0$.

2.78. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi k}{10}$, $k \neq 5p$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, $p \in \mathbf{Z}$.

2.79. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2.80. $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\neq 3k$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2.81. $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Решение. Используя формулу $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$, преобразуем исходное уравнение в виду

$$\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}4x-\operatorname{tg}3x=\sin 4x-\operatorname{tg}2x. \tag{1}$$

Область допустимых значений x для уравнения (1) определяется условиями

$$\cos 2x\neq 0,\ \cos 3x\neq 0,\ \cos 4x\neq 0, \tag{2}$$

а при выполнении условий (2) исходное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}4x=\sin 4x. \tag{3}$$

Уравнение (3) равносильно совокупности уравнений

$$\sin 4x=0, \tag{4}$$

$$\cos 4x=1, \tag{5}$$

причем все корни уравнения (5) содержатся среди корней уравнения (4). Из (4) следует, что либо $\sin x=0$, и тогда $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, либо $\cos x=0$ (и тогда $\cos 3x=0$), либо $\cos 2x=0$.

2.82. $x=\frac{\pi n}{8}$, $n\neq 2+4k$, $n\neq 4+8k$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2.83. $x=\frac{\pi n}{8}$, $n\neq 2+4k$, $n\neq 4+8k$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2.84. $x=\frac{\pi n}{6}$, $n\neq 3+6k$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2.85. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Решение. Из формул для $\cos 3x$ и $\sin 3x$ следует, что

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x),\ \sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x).$$

Поэтому

$$\cos^3 x\sin 3x+\sin^3 x\cos 3x=\frac{3}{4}(\sin 3x\cos x+\sin x\cos 3x)=$$
$$=\frac{3}{4}\sin 4x=3\sin x\cos x\cos 2x,$$

и исходное уравнение при условии

$$\sin x\neq 0$$

равносильно каждому из уравнений

$$3\sin x\cos x\cos 2x=6\sin x\cos^2 x\cos 2x,$$

$$\cos x\cos 2x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0.$$

2.86. $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.87. $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$

2.88. $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.89. $x=\pi n$, $x=\frac{2\pi}{5}+\pi n$, $x=\frac{4\pi}{5}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Решение. Допустимые значения x определяются условием

$$\cos 3x\neq 0, \tag{1}$$

так как все корни уравнения $\cos x=0$ являются корнями уравнения $\cos 3x=0$.

Функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} 3x$ и $|\sin x|$ — периодические функции с периодом π и поэтому достаточно найти решения исходного уравнения на промежутке $[0;\pi)$.

Если $0\leqslant x<\pi$ и выполняется условие (1), то исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=4\sin x,\ \ \frac{\sin 4x}{\cos x\cos 3x}=4\sin x,$$

$$\frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\cos x\cos 3x}=4\sin x,\ \ \sin(\cos 2x-\cos 3x)=0, \tag{2}$$

$$\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}=0.$$

Все корни уравнения $\sin\frac{x}{2}=0$ удовлетворяют уравнению $\sin x=0$, а решения уравнения (2) задаются формулами

$$x=\pi k,\ \ x=\frac{2\pi k}{5},\ \ k\in\mathbf{Z}. \tag{3}$$

Из множества чисел (3) промежутку $[0;\pi)$ принадлежат числа 0, $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{4\pi}{5}$. Поэтому множество решений исходного уравнения задается формулами $x=\pi n$, $x=\frac{2\pi}{5}+\pi n$, $x=\frac{4\pi}{5}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.90. $x=\frac{\pi}{7}+\pi n$, $x=\frac{3\pi}{7}+\pi n$, $x=\frac{5\pi}{7}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.91. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=-\frac{3\pi}{10}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{10}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.92. $x=-\frac{3\pi}{14}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{14}+\pi n$, $x=\frac{5\pi}{14}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.93. $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, пользуясь тем, что

$$\cos 4x+\cos 2x=2\cos 3x\cos x,\ \ \cos 3x+\cos x=2\cos 2x\cdot\cos x,$$

$$\sin 4x-\sin 2x=2\cos 3x\sin x,\ \ \sin 3x-\sin x=2\cos 2x\cdot\sin x.$$

Получим

$$\frac{2\cos x\,(\cos 3x+\cos 2x)}{2\sin x\,(\cos 3x+\cos 2x)}.$$

При преобразовании правой части уравнения воспользуемся формулами

$$1-2\sin^2 x=\cos 2x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x).$$

Область допустимых значений уравнения определяется условиями

$$\begin{gathered}\cos 3x+\cos 2x=2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2}\neq 0,\\ \sin x\neq 0,\ \ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0.\end{gathered}\tag{1}$$

а) Если $\cos 2x\geqslant 0$ и выполняются условия (1), то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\begin{gathered}\cos x=2\cos x+2\sin x,\ \text{откуда}\ \operatorname{tg} x=-\frac{3}{2},\\ x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{N}.\end{gathered}\tag{2}$$

Значения x, определяемые формулой (2), удовлетворяют условию $\cos 2x\geqslant 0$ и является решениями исходного уравнения.

б) Если $\cos 2x<0$ и выполняются условия (1), то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\cos x=-2(\cos x+\sin x),\ \text{откуда}\ \operatorname{tg} x=-\frac{3}{2},$$

$$x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Эти значения x также являются решениями исходного уравнения.

2.94. $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2.95. $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2.96. $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2.97. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Решение. Так как

$$8\cos^4 x=2(1+\cos 2x)^2=2\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=$$
$$=3+4\cos 2x+\cos 4x,$$

то исходное уравнение равносильно уравнению

$$-\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sin x}. \qquad (1)$$

Используя формулу $\cos 2x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$ и учитывая, что $\sin x\neq 0$, $\sin x+\cos x\neq 0$, преобразуем уравнение (1):

$$\sin x-\cos x=\frac{1}{\sin x},\quad \cos x(\sin x+\cos x)=0,$$

откуда $\cos x=0$.

2.98. $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.99. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.100. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.101. $x=4/5$.

Решение. Данное уравнение, ОДЗ которого определяется условиями $|x|\leqslant 1$, $x\neq 0$, равносильно уравнению $\operatorname{arctg} u=\arccos x$, где $u=\frac{2x-1}{2}$. Отсюда получаем уравнение $x^2=\frac{1}{1+u^2}$ или

$$x^2=\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2},\quad x^2+(2x-1)^2=1,\quad 5x^2-4x=0,\quad x=4/5.$$

2.102. $x=2/5$.

2.103. $x=1/5$.

2.104. $x=3/5$.

2.105. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Решение. Исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=1-\frac{\cos 2x}{\cos 3x},$$

$$\frac{\cos 4x+\cos 8x}{2}=\frac{\cos 2x}{\cos 3x},\quad \cos 6x\cos 2x=\frac{\cos 2x}{\cos 3x},$$

а при выполнении условия $\cos 3x\neq 0$ равносильно уравнению

$$\cos 2x(\cos 3x\cdot\cos 6x-1)=0.$$

Уравнение $\cos 2x=0$ имеет корни $x=\pi/4+\pi n/2$, $n\in\mathbf{Z}$, а уравнение $\cos 3x\cos 6x=1$ может иметь корни тогда, когда $\cos 3x=1$, откуда $x=\frac{2\pi n}{3}$.

2.106. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.107. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.108. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2.109. $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad x=\pi n,\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n,$ $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Решение. 1) Пусть

$$\cos x\geqslant 0. \tag{1}$$

Тогда уравнение можно записать в виде

$$\sin x+\cos x+(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)(2\sin 2x-1)=0, \tag{2}$$

так как $\cos 2x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$, $\sin 4x=2\cos 2x\times$ $\times\sin 2x$.

Из (2) следует, что либо $\cos x+\sin x=0$ и тогда

$$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

либо

$$1+(\cos x-\sin x)(2\sin 2x-1)=0 \tag{4}$$

Условию (1) удовлетворяют значения x, определяемые формулой (3) только при четных n, т. е. значения $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Обратимся к уравнению (4). Полагая $\cos x-\sin x=t$ и учитывая, что $\sin 2x=1-t^2$, из (4) получаем $2t^3-t-1=0$ или $(t-1)(2t^2+2t+1)=0$, откуда $t=1$. Уравнение $2t^2+2t+1=0$ не имеет действительных корней. Итак, $t=1$, т. е. $\cos x-\sin x=1$ или $\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=0$.

Если $\sin\frac{x}{2}=0$, то $x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; эти значения x удовлетворяют условию (1) и являются корнями исходного уравнения.

Если $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ — корни исходного уравнения.

2) Пусть

$$\cos x<0. \tag{5}$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$(\sin x-\cos x)(1+(1-2\sin 2x)(\sin x+\cos x))=0,$$

откуда следует, что либо $\sin x-\cos x=0$ и тогда

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \tag{6}$$

либо

$$1+(1-2\sin 2x)(\cos x+\sin x)=0. \tag{7}$$

Условию (5) удовлетворяют значения x, определяемые формулой (6) только при $k = 2n + 1$, т. е. значения $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Заменой $t = \cos x + \sin x$ преобразуем уравнение (7) к виду $2t^3 - 3t - 1 = 0$ или $(t+1)(2t^2 - 2t - 1) = 0$, откуда либо $t = -1$ и тогда $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — корни исходного уравнения, либо $t = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\sin x + \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ или

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Заметим, что $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. Поэтому из (8) следует, что

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Условию (5) удовлетворяют значения x, определяемые формулой (9) только при $k = 2n + 1$, т. е. значения $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.110. $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, .$n \in \mathbb{Z}$

2.111. $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pi + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.112. $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.113. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Так как $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$ и $\cos x \neq 0$, то уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}(\cos 2x - \cos 2x \sin^2 x) = 1,\ \frac{\cos 3x \cos 2x \cos^2 x}{\cos x} = 1$$

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = 1. \tag{1}$$

Уравнение (1) может иметь решения только в том случае, когда $|\cos x| = |\cos 2x| = |\cos 3x| = 1$.

1) Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n$, $\cos 2x = \cos 3x = 1$.

2) Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n$, $\cos 2x = 1$, $\cos 3x = -1$.

2.114. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.115. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.116. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.117. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Решение. Обозначим $f(x)=\sin 5x\cos 3x$ и рассмотрим два возможных случая: $f(x)\geqslant 0$, $f(x)<0$.

1) Пусть

$$f(x)=\sin 5x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 2x)\geqslant 0. \quad (1)$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$\frac{\sin 8x}{\sin 2x}=2\cos 2x \quad (2)$$

Так как $\sin 2x\neq 0$, то уравнение (2) равносильно уравнению

$$2\cos 2x\cos 4x=\cos 2x,$$

откуда следует, что либо $\cos 2x=0$, либо $\cos 4x=\frac{1}{2}$.

Если $\cos 2x=0$, то $\sin 8x=0$, $|\sin 2x|=1$, и из (1) следует, что

$$\sin 2x=1,\ \text{откуда}\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Если $\cos 4x=2\cos^2 2x-1=\frac{1}{2}$, то

$$\cos 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 2x=\pm\frac{1}{2}. \quad (3)$$

Чтобы провести отбор корней уравнений (24) с учетом условия (22), запишем $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x(4\cos 2x\cos 4x+1). \quad (4)$$

Так как $\cos 4x=\frac{1}{2}$, то $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x(2\cos 2x+1)$.

Отсюда и из (3) следует, что $f(x)>0$ тогда и только тогда, когда $\sin 2x\cdot\cos 2x>0$, так как $|2\cos 2x|=\sqrt{3}>1$. Следовательно, либо $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2x=\frac{1}{2}$, либо $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2x=-\frac{1}{2}$, откуда $2x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

2) Пусть $f(x)<0$, тогда исходное уравнение примет вид $-\frac{\sin 2x}{\sin 2x}=2\cos 2x$ или

$$\cos 2x=-\frac{1}{2}. \quad (5)$$

Тогда $\cos 4x=2\cos^2 2x-1=-\frac{1}{2}$ и из (4) следует, что

$$f(x)=\sin 2x.$$

Решив уравнение (5) при условии $f(x) = \sin 2x < 0$, получим $2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.118. $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$, $x = \frac{13\pi}{24} + \pi n$, $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.119. $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.120. $x = \frac{\pi}{24} + \pi n$, $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{7\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.121. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Обозначим $\sin x = t$, тогда $\sin 3x = 3t - 4t^3$, $\cos 2x - \cos 4x = 2 \sin 3x \sin x = 2t(3t - 4t^3)$. Исходное уравнение примет вид

$$8t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 3(t + |t|) = 0. \tag{1}$$

а) Пусть $t = \sin x \leqslant 0$, тогда уравнение (1) равносильно уравнению

$$t^2(4t^2 + 2t - 3) = 0.$$

Если $t = 0$, т. е. $\sin x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти значения x являются корнями исходного уравнения.

Решив уравнение $4t^2 + 2t - 3 = 0$, найдем его корни $t_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4}$, $t_2 = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$, где $t_1 < -1$, $t_2 > 0$. В этом случае исходное уравнение не имеет корней.

б) Пусть $t > 0$, тогда уравнение (1) равносильно каждому из уравнений

$$4t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 3t = 0,\ \ 4t^2(t-1) + 6t(t-1) + 3(t-1) = 0,$$

$$(t-1)(4t^2 + 6t + 3) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) имеет единственный действительный корень $t = 1$. Если $t = 1$, т. е. $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.122. $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.123. $x = \pi n$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.124. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.125. $x = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Возводя обе части данного уравнения в квадрат, получаем уравнение

$$\sin^2 x(1 - \cos x - 2 \sin x) = 1 + 2 \sin x \cos x, \tag{1}$$

являющееся следствием данного уравнения.

Преобразуем уравнение (1):

$$2\sin^3 x+\sin^2 x\cos x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=0,$$

$$2\sin x(\sin^2 x+\cos x)+\cos x(\sin^2 x+\cos x)=0,$$

$$(2\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos x)=0.$$

а) Если $2\sin x+\cos x=0$, то исходное уравнение примет вид $\sin x=\sin x+\cos x$, откуда $\cos x=0$, и тогда $\sin x=0$, что невозможно.

б) Если

$$\sin^2 x+\cos x=0, \tag{2}$$

т. е. $\cos^2 x-\cos x-1=0$, то $\cos x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, где $\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$, и поэтому $\cos x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

$$x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

При выполнении условия (2) имеем

$$\sqrt{1-\cos x-2\sin x}=\sqrt{1+\sin^2 x-2\sin x}=1-\sin x,$$

и поэтому исходное уравнение принимает вид

$$\sin x-\sin^2 x=\sin x+\cos x,\ \text{ или }\ \sin^2 x+\cos x=0.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению (2). Поэтому значения x определяемые формулой (3), и только эти значения, являются корнями исходного уравнения.

2.126. $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2.127. $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2.128. $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2.129. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{6}}{2}+\pi n,$

$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Решение. Воспользуемся формулами

$$\sin 3x=\sin x(3-4\sin^2 x)=\sin x(2\cos 2x-1),$$

$$\cos 6x=\cos 2x(4\cos^2 2x-3) \tag{1}$$

и рассмотрим два возможных случая: $\cos 6x>0$, $\cos 6x<0$, учитывая при этом, что

$$\cos 2x\neq 0,\ \sin x\neq 0. \tag{2}$$

а) В первом случае нужно решить уравнение

$$2(2\cos 2x+1)=4\cos^2 2x-3 \tag{3}$$

при условии

$$\cos 6x > 0. \qquad (4)$$

Положим $\cos 2x = t$, тогда уравнение (3) примет вид $4t^2 - 4t - 5 = 0$. Это уравнение имеет корни $t_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{2}$ и $t_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{2} > 1$.

Итак, $\cos 2x = \frac{1-\sqrt{6}}{2} < 0$, откуда

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{6}}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (5)$$

Из равенства (1) следует, что

$$\cos 6x = t_1(4t_1^2 - 3),$$

где $4t_1^2 - 3 = (1-\sqrt{6})^2 - 3 = 4 - 2\sqrt{6} < 0$.

Поэтому $\cos 6x > 0$, если $\cos 2x = t_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{2}$, где $t_1 < 0$. Итак, условие (4) выполняется, и значения x, определяемые формулой (5), являются корнями исходного уравнения.

б) Во втором случае ($\cos 6x < 0$) нужно решить уравнение

$$4t^2 + 4t - 1 = 0,\ t = \cos 2x.$$

Это уравнение имеет корни

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0 \text{ и } t_2 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2} < -1.$$

Проверим выполнение условия

$$\cos 6x < 0,$$

используя формулу (1). Получим

$$\cos 6x = t_1(4t_1^2 - 3),$$

где $4t_1^2 - 3 = (\sqrt{2}-1)^2 - 3 = -2\sqrt{2} < 0$.

Так как $t_1 > 0$, то $\cos 6x < 0$, и поэтому корни уравнения $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, т. е. числа

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

являются корнями исходного уравнения.

2.130. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.131. $x = \frac{(-1)^k}{2}\arccos\left(\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right) + \pi k$, $x = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\arccos\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.132. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

3.1. $x=\frac{1}{2}$.

Решение. Заметим, что функции, входящие в уравнение, определены при

$$0<x<\frac{3}{2},\ x\neq 1. \qquad (1)$$

Переходя к логарифмам по основанию x, преобразуем уравнение к виду

$$\log_x^2(3-2x)=\log_x(3-2x)+2,$$

откуда

$$\log_x(3-2x)=2,\ \log_x(3-2x)=-1.$$

В первом случае

$$3-2x=x^2,\ x_1=-3\ ,\ x_2=1.$$

Во втором случае

$$3-2x=\frac{1}{x},$$

$$x_3=1,\ x_4=\frac{1}{2}.$$

Условиям (1) удовлетворяет лишь $x=\frac{1}{2}$.

3.2. $x=\frac{1}{12}$, $x=\frac{3}{4}$

3.3. $x=\frac{4}{3}$, $x=2$.

3.4. $x=\frac{1}{6}$, $x=\frac{2}{3}$.

3.5. $x\leqslant 0$, $x\neq -\frac{1}{2}$, $0<x<\frac{1}{4}$, $x>1$.

Решение. Так как $16x^4-8x^2+1=(4x^2-1)^2$, то функции, входящие в неравенство, определены при $|x|\neq\frac{1}{2}$, а само неравенство равносильно каждому из следующих:

$$\frac{x}{|4x^2-1|}<\frac{1}{3},\quad |4x^2-1|>3x. \qquad (1)$$

Левая часть (1) неотрицательна, поэтому все значения x такие, что

$$x\leqslant 0,\ x\neq -\frac{1}{2},$$

являются решениями неравенства.

При $x>0$ возникают две возможности, связанные со знаком числа $4x^2-1$.

1) $x > \frac{1}{2}$, тогда $4x^2 - 1 > 0$, и неравенство (1) эквивалентно

$$4x^2 - 1 > 3x, \text{ или } (x-1)(4x+1) > 0,$$

откуда с учетом условия $x > \frac{1}{2}$ получаем $x > 1$.

2) $0 < x < \frac{1}{2}$, тогда $4x^2 - 1 < 0$, и $1 - 4x^2 > 3x$, или $(x+1)(4x-1) < 0$, откуда $0 < x < \frac{1}{4}$.

3.6. $x \in \left\{\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

3.7. $x \in \left\{\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{5}\right) \cup (1; +\infty)\right\}$.

3.8. $x \in \left\{(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 0) \cup \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup [2, +\infty)\right\}$.

3.9. $x = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi k = \operatorname{arctg}\sqrt{3/5} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.10. $x = \arccos\frac{1}{4} + (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

3.11. $x = \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3} + \pi n = \operatorname{arcctg}\sqrt{5} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3.12. $x = \arcsin\frac{2}{3} + (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

3.13. -2.

3.14. $\frac{5}{4}$.

3.15. -1.

3.16. $\frac{1}{3}$

3.17. $\log_7\frac{4}{9} < x < \log_7\frac{1}{2},\ 0 < x < \log_7 4$.

3.18. $\log_{5/2} 2 < x < 1,\ x < -1$.

3.19. $\log_5\frac{3}{10} < x < \log_5\frac{1}{3},\ 0 < x < \log_5 3$.

3.20. $\log_{28/9} 3 < x < 1,\ x < -\frac{1}{2}$.

3.21. $x \leqslant -1,\ \sqrt{\log_5 6} < x < \sqrt{2}$.

3.22. $-\log_2 10 < x < -1$.

Решение. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2^{-x} - 1 \geqslant 0, \\ 3 - \sqrt{2^{-x} - 1} > 0, \\ 3 - \sqrt{2^{-x} - 1} < 2^{-x}. \end{cases}$$

Положив $y = 2^{-x}$, получаем неравенства $y \geqslant 1$, $\sqrt{y-1} < 3$, $3 - y < \sqrt{y-1}$.

Отсюда

$$1 \leqslant y < 10 \tag{1}$$

и $3 - (z^2 + 1) < z$, где $z = \sqrt{y-1} \geqslant 0$.

Имеем: $z^2+z-2>0$, $z>1$, так как $z>0$, т.е. $\sqrt{y-1}>1$, $y>2$. Учитывая (1), получаем: $2<y<10$, $2<2^{-x}<10$, откуда $-\log_2 10<x<-1$.

3.23. $x\leqslant -1$, $\sqrt{\log_4 5}<x<\sqrt{2}$.

3.24. $-\log_3 18<x<-1$.

3.25. $-\frac{1}{7}<x\leqslant -\frac{1}{8}$, $x\geqslant 0$.

Решение. Область определения функции записывается в виде системы неравенств

$$\begin{cases}1+6x>0,\\ 1+7x>0,\\ \log_4(1+6x)+|\log_{\frac{1}{8}}(1+7x)|\geqslant 0,\end{cases}$$

равносильной системе

$$\begin{cases}x>-\frac{1}{7},\\ 3\log_2(1+6x)+2|\log_2(1+7x)|\geqslant 0.\end{cases}\tag{1}$$

Рассмотрим два случая: а) $x\geqslant 0$, б) $-\frac{1}{7}<x<0$.

а) В этом случае $1+6x\geqslant 1$, $\log_2(1+6x)\geqslant 0$ и неравенство (1) справедливо в силу того, что оба слагаемых в левой части неотрицательны.

б) $1+7x<1$, тогда $\log_2(1+7x)<0$ и неравенство (1) принимает вид

$$3\log_2(1+6x)-2\log_2(1+7x)\geqslant 0,\quad (1+6x)^3\geqslant(1+7x)^2,$$

$$216x^3+59x^2+4x\geqslant 0,\ \ 216x^2+59x+4\leqslant 0\ \ (x<0),$$

$$-\frac{4}{27}\leqslant x\leqslant -\frac{1}{8}.$$

Таким образом, область определения функции задается неравенствами

$$x\geqslant 0\ \text{ и }\ -\frac{1}{7}<x\leqslant -\frac{1}{8}.$$

3.26. $-\frac{2}{7}<x\leqslant -\frac{1}{4}$, $x\geqslant 0$.

3.27. $-\frac{2}{7}<x\leqslant -\frac{1}{4}$, $x\geqslant 0$.

3.28. $-\frac{4}{21}<x\leqslant -\frac{1}{6}$, $x\geqslant 0$.

3.29. $x<\log_{32}\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, $x>1$.

3.30. $\log_3\frac{12}{5}<x\leqslant 1$.

3.31. $x<\log_{13}\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x>1$.

3.32. $2-\log_4 5<x\leqslant 1$.

3.33. $-\frac{1}{2} < x < -\frac{2}{5}$, $-\frac{2}{7} < x < 0$, $x > 0$.

3.34. $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5} < x < 0$, $x > 0$.

3.35. $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{7} < x < 0$, $x > 0$.

3.36. $-\frac{1}{2} < x < -\frac{3}{7}$, $-\frac{1}{3} < x < 0$, $x > 0$.

3.37. $x < -\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{12} < x < 0$.

3.38. $x < -\frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{12}$.

Указание. Заменой $u = \log_2\left(\frac{1}{3} - x\right)$, $v = \log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right|$ неравенство сводится к виду $\frac{1}{3}\frac{u^2}{v} > u - \frac{2}{3}v$ или $v(u-v)(u-2v) > 0$. Здесь, если $v > 0$, то $u < v$ или $u > 2v$, если же $v < 0$, то $2v < u < v$.

3.39. $-2 < x < -\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{8} < x < 0$.

3.40. $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{3}$, $-\frac{7}{3} < x < -\frac{4}{3}$.

3.41. $x = \pi + \arccos\frac{1}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3.42. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$; $x = \pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3.43. $x = \pi + \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n$; $x = \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3.44. $x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3.45. $\frac{25}{9} < x < \frac{25}{4}$, $\frac{5}{6} < x < 1$.

3.46. $\frac{1}{3} < x < 1$, $3 < x < 11$.

3.47. $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{30} < x < \frac{1}{25}$.

3.48. $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} < x < 1$.

3.49. $x < -1$, $\log_3 2 < x \leqslant \log_3 10 - 1$.

3.50. $-1 \leqslant x < 0$, $x > \log_2 17 - 1$.

3.51. $x < -1$, $2 < x \leqslant \log_2 17 - 1$.

3.52. $\log_3 2 - 1 \leqslant x < \log_3 2$, $x > 2$.

3.53. $(-3, -2) \cup (-1, 0)$.

Указание. Неравенство равносильно совокупности следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} 2^{-x} - 1 < 2^{-x-1} + 1, \\ 4^{-x} > 1, \\ |x+2| > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{-x} - 1 > 2^{-x-1} + 1, \\ 4^{-x} > 1, \\ 0 < |x+2| < 1. \end{cases}$$

3.54. $(0, 1) \cup (2, 3)$.

3.55. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

3.56. $\left(0, \frac{2}{3}\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right)$.

3.57. $x_1 = -7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

Указание. Исходное уравнение равносильно уравнению $\log_7 |x-1| + \log_7 \frac{2x+9}{7x+9} = 0$, которое равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x > 1, \\ (2x+9)(x-1) = 7x+9 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x < 1, \\ (2x+9)(1-x) = 7x+9. \end{cases}$$

3.58. $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 5$.

3.59. $x_1 = 0$; $x_2 = 7$; $x_3 = 10$.

3.60. $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$.

3.61. $\frac{2(ab+a+1)}{ab+3a+2}$.

3.62. $\frac{1+2a+ab}{1+a+2ab}$.

3.63. $\frac{3+a+ab}{2+a+2ab}$.

3.64. $\frac{2+a+2ab}{1+2a+ab}$.

3.65. $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$.

3.66. $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4} < x < 0$, $0 < x < 1$.

3.67. $-\frac{1}{2} \leqslant x < -\frac{1}{3}$.

3.68. $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < 0$, $0 < x < 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{x^2} |5x+2| < \log_{x^2} |x|,$$

которое равносильно совокупности следующих двух систем неравенств

$$\begin{cases} |x| > 1, \\ |5x+2| < |x|, \end{cases} \tag{1}$$

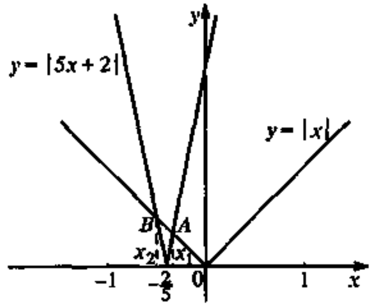
$$\begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ |5x+2| > |x|. \end{cases} \tag{2}$$

Чтобы решить системы (1) и (2), построим графики функций $y = |x|$ и $y = |5x+2|$ (см. рис.).

Эти графики пересекаются в точках A и B, абсциссы x_1 и x_2 которых являются корнями соответственно уравнений $5x + 2 = -x$ и $-5x - 2 = -x$, откуда находим $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

1) Если $|x| > 1$, то график функции $y = |5x + 2|$ лежит выше графика функции $y = |x|$. Поэтому система (1) не имеет решений.

2) Если $0 < |x| < 1$, то график функции $y = |5x + 2|$ лежит выше графика функции $y = |x|$ на интервалах $\Delta_1 = (-1, x_2)$, $\Delta_2 = (x_1, 0)$ и $\Delta_3 = (0, 1)$. Поэтому множество решений системы (2) — объединение интервалов Δ_1, Δ_2 и Δ_3.



К задаче 3.68.

3.69. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.70. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $t^2 \log_6 2 = t \log_6 12$, где $t = \log_2 (4\cos x + 3)$.

Если $t = 0$, то $4\cos x + 3 = 1$, т. е. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Если $t = \frac{\log_6 12}{\log_6 2} = \log_2 12$, то $4\cos x + 3 = 12$. Это уравнение не имеет корней.

3.71. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.72. $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.73. $(2; -3)$, $(-6; 1)$.

Решение.

Первое уравнение системы можно записать в виде

$$\log_2 [xy(x + 2y)] + \log_2 \frac{x+2y}{xy} = 4,$$

а множество допустимых значений x, y определяется условием

$$xy(x + 2y) > 0. \qquad (1)$$

При выполнении условия (1) исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} (x + 2y)^2 = 16, \\ \left|\frac{xy}{6}\right| = 1, \end{cases} \qquad (2)$$

а система (1)–(2) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ xy = 6 \end{cases} \qquad (3)$$

и

$$\begin{cases} x + 2y = -4, \\ xy = -6. \end{cases} \qquad (4)$$

Исключая x из системы (3), получаем уравнение $y^2 - 2y + 3 = 0$, не имеющее действительных корней. Поэтому система (3) не имеет действительных решений.

Из системы (4) получаем уравнение $y^2 + 2y - 3 = 0$, имеющее корни $y_1 = -3$, $y_2 = 1$.

Поэтому исходная система имеет два решения: $(2; -3)$ и $(-6; 1)$.

3.74. $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $(-3; 1)$.

3.75. $(1; -6)$, $(-3; 2)$.

3.76. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $(3; 1)$.

3.77. $-\sqrt{15} < x < \frac{1-\sqrt{73}}{2}$, $5 < x < 6$.

Решение. Исходное неравенство равносильно следующему

$$1 < \frac{x^2 - |x| - 12}{x+3} < 2. \tag{1}$$

а) Пусть $x > 0$, тогда $x^2 - |x| - 12 = (x-4)(x+3)$ и неравенство (1) примет вид $1 < x - 4 < 2$, откуда $5 < x < 6$.

б) Пусть $x < 0$, тогда неравенство (1) записывается в виде

$$1 < \frac{x^2 + x - 12}{x+3} < 2. \tag{2}$$

Если $-3 < x < 0$, то неравенство (2) равносильно неравенству $x + 3 < x^2 + x - 12 < 2(x+3)$ или системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 18 < 0, \\ x^2 - 15 > 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_1 < x < x_2, \\ |x| > \sqrt{15}, \end{cases}$$

где $x_1 = \frac{1-\sqrt{73}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{73}}{2}$.

Система неравенств

$$\begin{cases} |x| > \sqrt{15}, \\ -3 < x < 0 \end{cases}$$

несовместна.

Если $x < -3$, то система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} (x - x_1)(x - x_2) > 0, \\ |x| < \sqrt{15}, \end{cases}$$

откуда $-\sqrt{15} < x < x_1$, так как $x_1 > -\sqrt{15}$.

3.78. $1 - \sqrt{37} < x < \frac{2-\sqrt{292}}{3}$, $\frac{16}{3} < x < 6$.

3.79. $\frac{5-\sqrt{145}}{2} < x < 1 - \sqrt{19}$, $4 < x < 7$.

3.80. $-\frac{1+\sqrt{508}}{3} < x < -\sqrt{61}$, $\frac{25}{3} < x < 9$.

3.81. $(1-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Решение. Потенцируя, получаем систему

$$\begin{cases} 5y-x-2=3|x-y|, \\ y-2-4xy=3y|x|, \end{cases} \tag{1}$$

являющуюся следствием исходной системы.

а) Пусть $x>0$, тогда $|x|=x$ и, с учетом условия $x<y$ из первого уравнения системы (1) получаем $y=1-x$.

Тогда второе уравнение этой системы преобразуется к виду

$$7y^2-6y-2=0,$$

откуда

$$y_1=\frac{3+\sqrt{23}}{7}, \quad y_2=\frac{3-\sqrt{23}}{7}, \quad x_1=\frac{4-\sqrt{23}}{7}, \quad x_2=\frac{4+\sqrt{23}}{7}.$$

При $x=x_2$, $y=y_2$ не выполняется условие $x<y$, а при $x=x_1$, $y=y_1$ выражение под знаком логарифма в первом слагаемом левой части первого уравнения исходной системы отрицательно.

б) Пусть $x<0$, тогда из системы (1), с учетом условия $y>x$, получаем $y=1-x$, а из второго уравнения следует, что $y^2=2$, откуда

$$y_3=-\sqrt{2}, \quad y_4=\sqrt{2}, \quad x_3=1+\sqrt{2}, \quad x_4=1-\sqrt{2}.$$

Пара чисел $(x_3; y_3)$ не удовлетворяет условию $x<y$, а пара чисел $(x_4; y_4)$ удовлетворяет этому условию и исходной системе.

3.82. $\left(1-\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3.83. $\left(1-\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.84. $(1-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

3.85. $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}$, $x\geqslant 1$, $x\neq 2$.

Решение. Полагая $\log_2 x=t$ и учитывая, что $x>0$, $\log_4 x^2=\log_2 x$ (при $x>0$), преобразуем исходное неравенство к виду

$$\frac{1}{|t+1|-2}\leqslant\frac{1}{|t|-1}. \tag{1}$$

Рассмотрим три возможных случая: $t\leqslant -1$, $-1<t<0$, $t\geqslant 0$.

1) При $t\leqslant -1$ неравенство (1) равносильно каждому из неравенств $\frac{1}{-t-3}\leqslant\frac{1}{-t-1}$, $\frac{1}{t+3}\geqslant\frac{1}{t+1}$, $\frac{2}{(t+3)(t+1)}\leqslant 0$, откуда $-3<t<1$, т. е. $-3<\log_2 x<-1$, $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}$.

2) Если $-1<t<0$, то из (1) следует, что $\frac{1}{t-1}\leqslant\frac{1}{-t-1}$ или $\frac{2t}{(t+1)(t-1)}\leqslant 0$, откуда $t<-1$ или $0\leqslant t<1$. В этом случае неравенство (1) не имеет решений.

3) При $t \geqslant 0$ из (1) следует, что $\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{t-1}$. Это неравенство является верным при всех $t \geqslant 0$, кроме $t = 1$, т. е. при $x \geqslant 1$ и $x \neq 2$.

3.86. $0 < x < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} < x \leqslant 1$, $4 < x < 16$.

3.87. $\frac{1}{243} < x < \frac{1}{3}$, $1 \leqslant x < 3$, $x > 3$.

3.88. $\frac{1}{9} < x < 1$, $x \geqslant 3$, $x \neq 9$.

3.89. $(3; 0)$, $\left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right)$.

Решение. Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases} [\log_3 (x-y) - \log_3 (x+2y)][\log_3 (x-y) + 2\log_3 (x+2y)] = 0, & (1) \\ (x-y)(x+2y) = 9. & (2) \end{cases}$$

Из (1) следует, что либо

$$x - y = x + 2y, \qquad (3)$$

либо

$$(x-y)(x+2y)^2 = 1. \qquad (4)$$

Если выполнены условия

$$x - y > 0, \ x + 2y > 0, \qquad (5)$$

то система (1), (2) равносильна совокупности систем (3), (2) и (4), (2). Первая из этих систем имеет единственное решение (3; 0), удовлетворяющее условиям (5), а вторая система, равносильная системе

$$\begin{cases} x + 2y = \frac{1}{9}, \\ x - y = 81, \end{cases}$$

для которой выполняются условия (5), имеет решение $\left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right)$.

3.90. $(2; 0)$, $\left(\frac{43}{4}; \frac{21}{4}\right)$.

3.91. $(2; 0)$, $\left(\frac{11}{2}; \frac{21}{4}\right)$.

3.92. $(3; 0)$, $\left(\frac{731}{27}; -\frac{728}{27}\right)$.

3.93. $\left(0; \log_3 \frac{36}{17}\right)$, $\left(\log_3 \frac{49}{27}; \log_3 \frac{9}{7}\right)$.

Решение. Возводя в квадрат обе части второго уравнения системы, получаем $x + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$ или

$$x(x + 2y - 1) = 0, \qquad (1)$$

откуда следует, что либо $x = 0$, либо $x = 1 - 2y$.

Уравнение (1) равносильно второму уравнению исходной системы, если

$$x + y \geqslant 0. \qquad (2)$$

а) Пусть $x=0$, тогда из первого уравнения получаем

$$3^y=\frac{36}{17}, \text{ откуда } y=\log_3\frac{36}{17}.$$

Пара чисел $\left(0;\log_3\frac{36}{17}\right)$ удовлетворяют условию (2) и является решением исходной системы.

б) Пусть $x=1-2y$, тогда из первого уравнения системы получаем $3^{2-y}+7\cdot3^{y-2}=8$ или $t+\frac{7}{t}=8$, где $t=3^{2-y}$. Уравнение $t^2-8t+7=0$ имеет корни $t_1=1$, $t_2=7$.

Если $t=1$, то $3^{2-y}=1$, откуда $y=2$, $x=-3$. Пара чисел $(-3;2)$ не удовлетворяет условию (2).

Если $t=7$, то $3^{2-y}=7$, $3^y=\frac{9}{7}$, $y=\log_3\frac{9}{7}$, $x=1-2\log_3\frac{9}{7}=\log_3\frac{49}{27}$.

Пара чисел $\left(\log_3\frac{49}{27};\log_3\frac{9}{7}\right)$ удовлетворяет условию (2) и является решением исходной системы.

3.94. $\left(0;\log_2\frac{128}{71}\right)$, $(2\log_2 7-6;4-\log_2 7)$.

3.95. $\left(0;\log_5\frac{250}{141}\right)$, $(2\log_5 8-3;\,2-\log_5 8)$.

3.96. $\left(0;\log_3\frac{270}{97}\right)$, $(2\log_3 8-4;\,3-\log_3 8)$.

3.97. $-4<x<1-2\sqrt{6}$, $-\sqrt{15}\leqslant x\leqslant-\frac{19}{5}$, $-3\leqslant x\leqslant\sqrt{15}$, $1+2\sqrt{6}<$ $<x<6$.

Решение. Область E допустимых значений неравенства определяется условиями $2x+9>0$, $2x+9\neq1$, $24+2x-x^2=$ $=(x+4)(6-x)>0$, $24+2x-x^2\neq1$. Отсюда следует, что E — интервал $(-4;6)$ с выброшенными точками $x_1=1-2\sqrt{6}$, $x_2=1+2\sqrt{6}$, где $x_1\approx-3{,}8$, $x_2\approx4{,}8$.

Обозначим $t=\log_{2x+9}(24+2x-x^2)$, тогда неравенство примет вид $t+\frac{2}{t}\leqslant3$ или $\frac{(t-1)(t-2)}{t}\leqslant0$, откуда следует, что либо $t<0$, либо $1\leqslant t\leqslant2$.

а) Пусть $t<0$, т. е.

$$\log_{2x+9}(24+2x-x^2)<0. \tag{1}$$

Если $x\in E$, то $2x+9>1$ и неравенство (1) на множестве E равносильно неравенству $24+2x-x^2<1$ или

$$(x-x_1)(x-x_2)>0.$$

Поэтому множество решений неравенства (1) — объединение интервалов $(-4; x_1)$ и $(x_2; 6)$.

б) Пусть $1 \leqslant t \leqslant 2$, т. е.

$$1 \leqslant \log_{2x+9}(24 + 2x - x^2) \leqslant 2. \tag{2}$$

Так как $2x + 9 > 1$ на множестве E, то неравенство (2) равносильно неравенству

$$2x + 9 \leqslant 24 + 2x - x^2 \leqslant (2x + 9)^2,$$

которое равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x^2 + 34x + 57 = 5(x+3)\left(x + \frac{19}{5}\right) \geqslant 0, & (3)\\ x^2 \leqslant 15. & (4)\end{cases}$$

Множество решений неравенства (3) — объединение промежутков $x \leqslant -3$ и $x \geqslant -\frac{19}{5}$, а множество решений неравенства (4) — отрезок $[-\sqrt{15}; \sqrt{15}]$, где $x_1 < -\sqrt{15} < -\frac{19}{5} < -3$, $\sqrt{15} < x_2$. Следовательно, множество решений неравенства (2) состоит из отрезков $\left[-\sqrt{15}, -\frac{19}{5}\right]$ и $[-3, \sqrt{15}]$.

3.98. $-11 < x < -1 - 3\sqrt{11}$, $-\sqrt{79} \leqslant x \leqslant 7$, $\frac{43}{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{79}$, $-1 + 3\sqrt{11} < x < 9$.

3.99. $-2 < x < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$, $\frac{1+\sqrt{21}}{2} < x < 3$.

3.100. $-\frac{11}{2} < x < -\frac{1}{2} - 2\sqrt{6}$, $-\frac{\sqrt{73}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$, $\frac{7}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{73}}{2}$, $-\frac{1}{2} + 2\sqrt{6} < x < \frac{9}{2}$.

3.101. $\frac{11}{7} \leqslant x < 2$, $x > 8$.

Решение. Область допустимых значений неравенства определяется условиями $\frac{x-8}{x^2-2x-3} = \frac{x-8}{(x+1)(x-3)} > 0$, $x > 1$, $x \neq 2$, откуда следует, что E — объединение интервалов $1 < x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 8$. Так как $2 = \log_{\sqrt{x-1}}(x-1)$ при $x > 1$, то исходное неравенство на множестве E равносильно неравенству

$$\log_{\sqrt{x-1}} \frac{(x-8)(x-1)}{(x-3)(x+1)} \leqslant 0. \tag{1}$$

Рассмотрим два возможных случая: $1 < x < 2$ и $x > 2$.

1) Неравенство (1) равносильно каждой из систем неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x-8)(x-1)}{(x-3)(x+1)} \geqslant 1, \\ 1 < x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-\frac{11}{7}}{(x-3)(x+1)} \leqslant 0, \\ 1 < x < 2, \end{cases}$$

откуда следует, что $\frac{11}{7} \leqslant x < 2$.

2) Неравенство (1) равносильно каждой из систем неравенств

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{(x-8)(x-1)}{(x-3)(x+1)} \leqslant 1, \\ x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-\frac{11}{7}}{(x-3)(x+1)} \geqslant 0, \\ x > 8, \end{cases}$$

откуда получаем, что $x > 8$.

3.102. $x < -6$, $0 < x \leqslant 3/7$.

3.103. $25/7 \leqslant x < 4$, $x > 10$.

3.104. $-3/7 \leqslant x < 0$, $x > 6$.

3.105. $6 < x < \frac{13}{2}$, $7 < x < 8$.

Решение. Область E допустимых значений неравенства определяется условиями $x \geqslant -1$, $x \leqslant 9$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{9-x}$, $2x - 12 > 0$, $2x - 12 \neq 1$, откуда следует, что E — объединение промежутков $6 < x < 6{,}5$ и $6{,}5 < x \leqslant 9$. На множестве E исходное неравенство равносильно неравенству

$$2 \log_{2x-12} (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x}) < \log_{2x-12} (2x - 12). \qquad (1)$$

1) Пусть $x \in \left(6, \frac{13}{2}\right)$, тогда неравенство (1) равносильно каждому из неравенств $(\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x})^2 > 2(x-6)$, $11 - x > \sqrt{9 + 8x - x^2}$, $121 - 22x + x^2 > 9 + 8x - x^2$, $x^2 - 15x + 56 = (x-7)(x-8) > 0$, откуда следует, что значения x из интервала $\left(6, \frac{13}{2}\right)$ — решения неравенства (1).

2) Пусть $x \in \left(\frac{13}{2}, 9\right]$, тогда неравенство (1) равносильно неравенству $(x-7)(x-8) < 0$, откуда $7 < x < 8$.

3.106. $4 < x < 9/2$, $5 < x < 6$.

3.107. $5 < x < 11/2$, $6 < x < 7$.

3.108. $4 < x < 17/4$, $9/2 < x < 5$.

3.109. $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 2$.

Решение. Область определения неравенства — множество значений x таких, что

$$x > -2, \ x \neq 0.$$

1) Пусть $\lg(x+2)<0$, тогда $-2<x<-1$, $\lg^2(x+2)>0$, $|\lg x^2|>0$,

$$\sqrt{3\lg^2 x^2+\lg^2(x+2)}>\sqrt{3}\,|\lg x^2|>\lg x^2+\lg(x+2).$$

Следовательно значения x из интервала $(-2,-1)$ — решения исходного неравенства.

2) Пусть $\lg(x+2)=0$, тогда $x=-1$, а при $x=-1$ обе части исходного неравенства обращаются в нуль (неравенство $0>0$ не является верным).

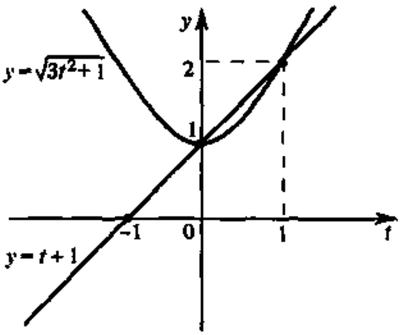
3) Пусть

$$\lg(x+2)>0. \tag{1}$$

Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{3t^2+1}>t+1, \tag{2}$$

где $t=\frac{\lg x^2}{\lg(x+2)}$.



К задаче 3.109.

Неравенство (2) будем решать с помощью графиков функций $y=\sqrt{3t^2+1}$ и $y=t+1$ (см. рис.).

Графики пересекаются при $t=0$ и $t=t_0$, где t_0 — положительный корень уравнения $(\sqrt{3t^2+1})^2=(t+1)^2$, т. е. уравнения $2t^2-2t=0$, откуда $t_0=1$.

При $t<0$ и $t>1$ график функции $y=\sqrt{3t^2+1}$ лежит выше графика функции $y=t+1$. Поэтому множество решений неравенства (2) — совокупность промежутков $t<0$ и $t>1$.

Неравенство $t=\frac{\lg x^2}{\lg(x+2)}<0$ с учетом условия (1) равносильно неравенству $\lg x^2<0$, откуда $0<|x|<1$.

Неравенство $t=\frac{\lg x^2}{\lg(x+2)}>1$ с учетом условия (1) равносильно каждому из неравенств $\lg x^2>\lg(x+2)$, $x^2-x-2>0$, откуда $x>2$, так как $x>-1$ в силу (1).

3.110. $0<x<1$, $1<x<2$, $2<x<3$, $x>4$.

3.111. $x<-2$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $1<x<2$.

3.112. $-1<x<0$, $0<x<1$, $1<x<2$, $x>3$.

3.113. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}-2\right)$.

Решение. Разложив левую часть второго уравнения системы на множители, запишем его в виде

$$(2x-y+1)(x-y-1)=0.$$

1) Если $y=2x+1$, то $5x-3y-1=-x-4$, $3x-y+1=x$. Так как неравенства $-x-4>0$ и $x>0$ несовместны, то в этом случае система не имеет решений (левая и правая части первого уравнения не имеют общей области определения).

2) Если $y=x-1$, то первое уравнение системы примет вид

$$\frac{\log_5 2+\log_5 (x+1)}{\log_5 (x+1)}=\frac{\log_2 (x+1)-1}{\log_2 (x+1)+1},$$

откуда

$$\log_5 2+\log_5 2\cdot\log_2 (x+1)+2\log_5 (x+1)=0,$$

$$\log_5 2+3\log_5 (x+1)=0,\ 2(x+1)^3=1,$$

$$x=-1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ y=x-1=-2+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

3.114. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+1; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}+2\right)$.

3.115. $\left(2-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}-1\right)$.

3.116. $\left(2+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; -1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

3.117. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<0,\ 0<x\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Решение. Область определения неравенства — множество значений x, удовлетворяющих условиям:

а) $x>-1,\ x\neq 0,\ x\neq 1;$ (1)

б) $\frac{1}{2}+\log_{x^2}(x+1)\geqslant 0;$ (2)

в) знаменатели дробей в обеих частях исходного неравенства не обращаются в нуль.

Найдем сначала решения неравенства (2), равносильного неравенству

$$\log_{|x|}(x+1)\geqslant -1. \quad (3)$$

Если $x>1$, то $|x|>1$, $x+1>2$, $\log_{x^2}(x+1)>0$, и поэтому значения $x>1$ — решения неравенства (3). Если $0<|x|<1$, то неравенство (3) равносильно неравенству

$$x+1<\frac{1}{|x|}. \quad (4)$$

Значения $x \in (-1; 0)$ — решения неравенства (4), а при $x \in (0, 1)$ из (4) следует неравенство $x^2 + x - 1 < 0$, решениями которого, с учетом условия $0 < x < 1$, являются значения $x \in (0, x_0]$, где $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $0 < x_0 < 1$.

Итак, множество E решений неравенства (2), удовлетворяющих условиям (1), представляет из себя совокупность промежутков

$$-1 < x < 0,\ 0 < x \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ x > 1. \tag{5}$$

Считая, что $x \in E$, преобразуем исходное неравенство, умножив обе его части на $\varphi(x) = \sqrt{1 + \log_{|x|}(x+1)} + \sqrt{3}$, где $\varphi(x) > 0$ при $x \in E$, и переходя к логарифмам по основанию $|x|$. Получим равносильное неравенство

$$\frac{\sqrt{2}\varphi(x)\log_{|x|} 3}{h(x)} \geqslant \frac{\sqrt{2}\log_{|x|} 3}{h(x)}, \tag{6}$$

где $h(x) = \log_{|x|}(x+1) - 2 = \log_{|x|} \frac{x+1}{x^2}$.

Отсюда следует, что указанное выше условие в) для области определения неравенства выполняется, если $h(x) \neq 0$. Неравенство (6) равносильно на множестве E неравенству

$$\frac{\log_{|x|} 3}{h(x)} \geqslant 0, \tag{7}$$

так как $\varphi(x) - 1 = \sqrt{1 + \log_{|x|}(x+1)} + \sqrt{3} - 1 > 0$.

Если $|x| < 1$, то $\log_{|x|} 3 > 0$, и неравенство (7) равносильно на множестве E каждому из неравенств $h(x) = \log_{|x|} \frac{x+1}{x^2} > 0$, $\frac{x+1}{x^2} > 1$,

$$x^2 - x - 1 < 0. \tag{8}$$

Множество решений неравенства (8) — интервал $E_1 = (x_1, x_2)$, где $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, где $-1 < x_1 < 0$, $x_2 > 1$, а множество решений исходного неравенства — пересечение множеств E и E_1, т. е. совокупность промежутков $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$, $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3.118. $-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < -1$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x < 0$, $0 < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3.119. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0$, $0 < x \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $1 < x < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

3.120. $-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < -1$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x < 0$, $0 < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3.121. (4; −2).

Решение. Первое уравнение можно записать так: $x^2 - y^2 + x + 5y - 6 = 0$ или $(x + y - 2)(x - y + 3) = 0$, откуда

$$x = y - 3 \tag{1}$$

или

$$x = 2 - y. \qquad (2)$$

Из второго уравнения системы следует, что

$$2 - y > 0, \ x > 0, \ x \neq 1. \qquad (3)$$

а) Если справедливо равенство (2), то из второго уравнения системы находим $x = y^2$, откуда, используя равенство (2), получаем $2 - y = y^2$ или $(y-1)(y+2) = 0$. Пусть $y = 1$, тогда $x = 1$, и не выполняются условия (3). Пусть $y = -2$, тогда $x = 4$ и $(4; -2)$ — решение данной системы.

б) Если справедливо равенство (1) и условия (3), то $y > 3$ и $y < 2$, что невозможно.

3.122. $(6, 2)$.

3.123. $(5, -2)$.

3.124. $(3, 2)$.

3.125. $-6 \leqslant x \leqslant -4$, $4 \leqslant x \leqslant 6$.

Решение. Пусть $|x| = t$. Тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$0 < \log_8 \frac{t^2 - 2t}{t - 3} \leqslant 1,$$

$$1 < \frac{t^2 - 2t}{t - 3} \leqslant 8. \qquad (1)$$

Неравенство (1) равносильно каждой из следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{t^2 - 10t + 24}{t - 3} \leqslant 0, \\ \dfrac{t^2 - 3t + 3}{t - 3} > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} t > 3, \\ (t-4)(t-6) \leqslant 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $4 \leqslant t \leqslant 6$, т. е. $4 \leqslant |x| \leqslant 6$.

3.126. $-\frac{7}{2} \leqslant x \leqslant -1$, $1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$.

3.127. $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$.

3.128. $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{2}{7}$, $\frac{2}{7} \leqslant x \leqslant 1$.

4. ПЛАНИМЕТРИЯ

4.1. $\frac{5}{7}a$.

Р е ш е н и е. Пусть окружность касается AB, AC и MN соответственно в точках P, S и T (см. рис.). Обозначим $AB = x$, $\angle BAC = \alpha$, тогда $BM = \frac{1}{8}x$. По свойству касательных $AS = AP = \frac{a}{2}$, $MP = MT = AB - (AP + BM) = x - \left(\frac{a}{2} + \frac{x}{8}\right) = \frac{7}{8}x - \frac{a}{2}$, $NT = NS = NC + CS = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$, $MN = NT + MT = \frac{3}{2}a + \frac{7}{8}x - \frac{a}{2} = a + \frac{7}{8}x$.

По теореме косинусов

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM\cdot AN\cdot\cos\alpha,$$

$$\left(a + \frac{7}{8}x\right)^2 = \left(\frac{7}{8}x\right)^2 + 4a^2 - 2\cdot\frac{7}{8}x\cdot 2a\cdot\cos\alpha,$$

или

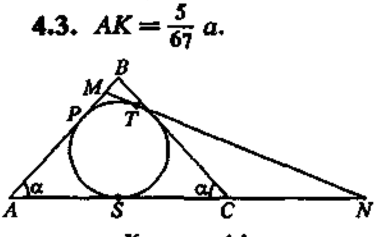
$$\frac{7}{4}x = 3a - \frac{7}{2}x\cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = \frac{AS}{AB} = \frac{a}{2x}$.

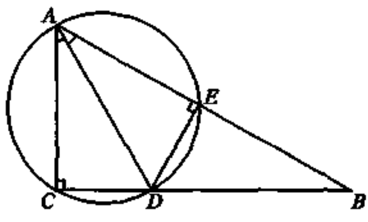
Следовательно, $\frac{7}{4}x = 3a - \frac{7}{2}x\cdot\frac{a}{2x}$, откуда $x = \frac{5}{7}a$.

4.2. $r = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

4.3. $AK = \frac{5}{67}a$.



К задаче 4.1.



К задаче 4.5.

4.4. $r = \frac{3}{2}$.

4.5. $S = 32$.

Р е ш е н и е. Поскольку по условию $\angle ACD = \frac{\pi}{2}$, то AD — диаметр и $\angle AED = \frac{\pi}{2}$ (см. рис.). Так как AD — биссектриса, то треугольники ACD и AED равные. Пусть $AC = 3x$, тогда $AE = 3x$, $AB = 5x$, $EB = 2x$, $CB = 4x$ (по теореме Пифагора). Из подобия треугольников ABC и EDB вытекает, что $\frac{DB}{AB} = \frac{EB}{CB}$. Откуда $DB = \frac{5}{2}x$, $CD = \frac{3}{2}x$, $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}x = 2\sqrt{15}$. Значит, $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$, а искомая площадь

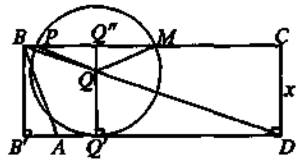
$$S = \frac{1}{2}AC\cdot BC = 6x^2 = 32.$$

4.6. $p = 20$.

4.7. $\frac{S_\Delta}{S_{кр}} = \frac{216}{65\pi}$.

4.8. $\frac{l_{окр}}{p_\Delta} = \frac{3\pi}{8}$.

4.9. $AB = 3$.



К задаче 4.9.

Решение. Пусть $CD = x$ (см. рис.), B' и Q' — проекции точек B и Q на прямую AD, а Q'' — проекция точки Q на прямую BC. Тогда $QQ' = QM = \frac{3}{4}x$, $QQ'' = \frac{1}{4}x$, $Q''M = \sqrt{(QM)^2 - (QQ'')^2} = \frac{x}{\sqrt2}$, $PM = 2Q''M = x\sqrt2 = 4$, откуда $x = 2\sqrt2$. Поэтому

$$AB = \sqrt{(BB')^2 + (B'A)^2} = \sqrt{(CD)^2 + (BC - AD)^2} = 3.$$

4.10. $p_{MNC} = 2(2 + \sqrt{13})$.

4.11. $p_{ABCD} = 58$.

4.12. $p_{ABC} = 20(1 + \sqrt5)$.

4.13. $\angle BAC = \operatorname{arctg} 2$,
$\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$.

4.14. $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{2}{3}\pi$.

4.15. $6 + 2\sqrt2$.

4.16. $AB = 2\sqrt2$.

4.17. 4

4.18. $15\sqrt3$.

4.19. $3\sqrt3$.

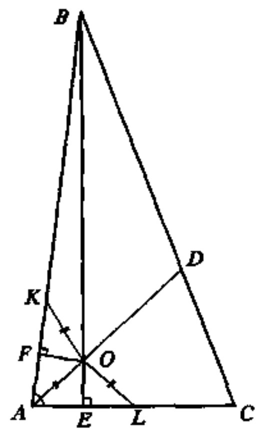
4.20. $60\sqrt3$.

4.21. 40.

4.22. $\frac{12}{25}$.

4.23. $\frac{62}{5}$.

4.24. $\frac{80}{9}$.



К задаче 4.26.

4.25. $BC = 3R$ $\left(AB = 2\sqrt{\frac{6}{5}}R,\ AC = \frac{7R}{\sqrt5},\ \cos\angle BAC = \frac{1}{\sqrt6}\right)$.

4.26. $BC = \frac{9}{\sqrt2}R$, $\left(AB = 6R,\ AC = 3R,\ \cos\angle BAC = \frac{1}{8}\right)$.

Решение. По условию $AB = 4AK$ (см. рис.). Пусть OF — высота равнобедренного треугольника AOK $(AO = OK = R)$, тогда $AB = 4AK = 8AF$. Таким образом, из равенства прямоугольных треугольников AOE и AOF (AO — общая, $\angle FAO = \angle EAO$) следует, что $AB = 8AE$, т.е. $\cos\angle BAC = \frac{1}{8}$. Отсюда $\cos\angle OAC = \frac{3}{4}$, значит, $AE = \frac{3}{4}R$. Тогда $AB = 6R$ и $AC = 2AL = 4AE = 3R$ (L — середина

AC). Сторону BC найдем по теореме косинусов из треугольника ABC: $BC = \frac{9}{\sqrt{2}} R$.

4.27. $AB = 2\sqrt{2} R$ $\left(AC = \sqrt{5} R,\ BC = 3R,\ \cos \angle ACB = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

4.28. $AC = 5R$ $\left(\cos \angle CBA = \frac{1}{4},\ \cos \angle CBO = \frac{\sqrt{10}}{4},\ BC = \sqrt{10} R,\ BA = \frac{3\sqrt{10}}{2} R\right)$.

4.29. $\frac{49\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть $CD = x$, $\angle KDA = \alpha$, тогда $\angle KCB = \pi - \angle KCD - \angle KDC - \alpha = \frac{\pi}{3} - \alpha$ (см. рис.).

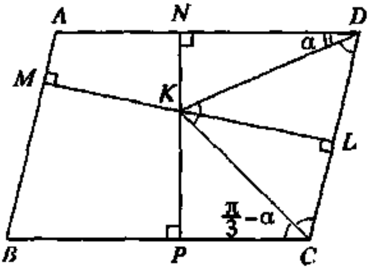
По условию $KN = 3$, $KM = 6$, $KP = 5$, где M, N, L, P — проекции точки K на стороны параллелограмма. Из треугольников KDN и KCP находим $x \sin \alpha = 3$, $x \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 5$. Отсюда

$$5 \sin \alpha = 3 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{13},$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{196}{169},$$

$$\cos \alpha = \frac{13}{14},\ \sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$



К задаче 4.29.

Таким образом, $x = CD = \frac{14}{\sqrt{3}}$, $KL = \frac{\sqrt{3}}{2} CD = 7$, $ML = 13$. Площадь параллелограмма вычисляется по формулам $S = ML \cdot CD$ и $S = NP \cdot AD$, откуда $AD = \frac{91}{4\sqrt{3}}$ и периметр параллелограмма равен $\frac{49\sqrt{3}}{2}$.

4.30. $28\sqrt{3}$ $\left(\angle BCD = \arccos \frac{13}{14},\ CD = \frac{14}{\sqrt{3}},\ AD = \frac{28}{\sqrt{3}}\right)$.

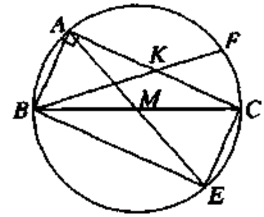
4.31. $\frac{77}{2}\sqrt{3}$ $\left(\angle KLM = \arccos \frac{1}{7},\ \angle PKL = \arccos \frac{11}{14},\ \angle PNM = \arccos \frac{13}{14},\ KN = \frac{28}{\sqrt{3}},\ KL = \frac{17}{16} KN = \frac{119}{4\sqrt{3}}\right)$.

4.32. $14\sqrt{3}$ $\left(\angle MNK = \arccos \frac{11}{14},\ KN = \frac{14}{\sqrt{3}},\ KL = \frac{14\sqrt{3}}{5}\right)$.

4.33. $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 2$, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$.

Решение. Из условия следует, что хорды BC и AE в точке M пересечения делятся пополам, поэтому $ACEB$ — параллелограмм, вписанный в окружность, следовательно, он является прямоугольником.

Итак, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ и M — центр окружности. Пусть $KF = x$, тогда из условия следует, что $BK = 2x$. По теореме о пересекающихся хордах окружности $BK \cdot KF = AK \cdot KC$. Но $KC = AK$, поэтому $AK^2 = 2x^2$, $AK = x\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника BAK находим $AB = \sqrt{BK^2 - AK^2} = x\sqrt{2}$. Итак, катеты треугольника ABC равны $x\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}x$, поэтому его углы равны $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 2$ и $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$.



К задаче 4.33.

4.34. $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$.

4.35. $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

4.36. $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$.

4.37. $S = \frac{49}{10\sqrt{3}}$ $\left(AB = \frac{14}{5\sqrt{3}}, \sin \angle ABC = \frac{5\sqrt{3}}{14}\right)$.

4.38. $S = 5\sqrt{5}$ $\left(BD = \frac{21}{4\sqrt{5}}, \sin \angle ABC = \frac{8\sqrt{5}}{21}\right)$.

Указание. Диаметр окружности — расстояние от точки E до прямых AB и CB, поэтому синусы углов A и C треугольника ABC равны соответственно $\frac{2}{7}$ и $\frac{2}{3}$. Длина стороны ромба находится по теореме синусов.

4.39. $S = \frac{49}{2\sqrt{5}}$ $\left(AB = \frac{21}{2\sqrt{5}}, \sin \angle BCD = \frac{4\sqrt{5}}{21}\right)$.

4.40. $S = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ $\left(CD = \frac{14}{3\sqrt{3}}, \sin \angle ACB = \frac{3\sqrt{3}}{14}\right)$.

4.41. $S = \frac{245}{8}$ $\left(AP : PD = 4 : 3, \cos \angle B = \frac{3}{5}, AB = \frac{35}{4}, AC = \frac{7\sqrt{5}}{2}\right)$.

4.42.
$S = \frac{1323}{20}$ $\left(AO : OM = 5 : 2, \cos \angle BAC = \frac{3}{5}, AB = \frac{63}{2\sqrt{10}}, BC = \frac{42}{\sqrt{10}}\right)$.

Указание. Если K — середина биссектрисы CD, то треугольники OKM и ODA подобны, следовательно, $AD : KM = 5 : 2$. С другой стороны, $BD : KM = 2 : 1$, поэтому $CA : CB = AD : BD = 5 : 4$.

4.43. $S = 30$ $(AK : KM = 1 : 2, \cos \angle B = \frac{4}{5}, BC = 10, AC = 2\sqrt{10})$.

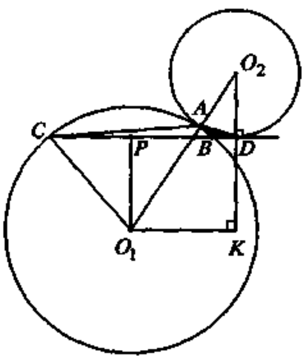
4.44.
$S = \frac{1352}{15}$ $\left(AM : MD = 10 : 3, \cos \angle BAC = \frac{4}{5}, AB = \frac{52}{3\sqrt{5}}, BC = \frac{26}{\sqrt{5}}\right)$.

4.45. $r = 3$.

4.46. $r = \frac{9}{2}$.

Решение. По теореме синусов найдем радиус окружности $S_1(O_1)$: $R = \frac{CB}{2 \sin \angle BAC} = \frac{17}{2}$ (см. рис.). Пусть P — середина BC, тогда $O_1P \perp BC$

и из треугольника O_1CP находим $O_1P=\frac{15}{2}$. Из условия задачи следует, что окружности $S_1(O_1)$ и $S_2(O_2)$ касаются внешним образом, поэтому $O_1O_2=R+r=\frac{17}{2}+r$. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую O_2D. Тогда $O_2K=$ $=O_2D+O_1P=r+\frac{15}{2}$ и $O_1K=PD=$ $=PB+BD=5$. Из треугольника O_1O_2K находим r: $\left(\frac{17}{2}+r\right)^2=\left(r+\frac{15}{2}\right)^2+25$, откуда $r=\frac{9}{2}$.



К задаче 4.46.

4.47. $r=12$.

4.48. $r=6$.

4.49. $S=10\sqrt{3}$.

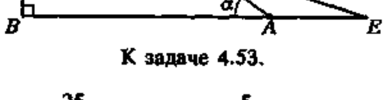
4.50. $S=\frac{24}{25}$.

4.51. $P=66$.

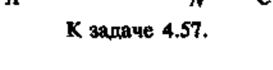
4.52. $S=\frac{216}{25}$.

4.53. $S=\frac{96}{25}$.

Решение. Выберем на стороне AC точку P так, что $DP \parallel AB$ (см. рис.), тогда $CP=\frac{5}{4}$, $DP=\frac{3}{4}$. Пусть $AK=CK=x$, тогда из подобия треугольников DPK и EAK следует, что $PK{:}AK=DP{:}AE$, т. е. $(x-5/4){:}x=3/4{:}2$, откуда $x=2$. Тогда $AC=4$, $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC=$ $=\frac{1}{2}AC^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{96}{25}$, так как $\sin\alpha=\frac{DP}{CP}=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.



К задаче 4.53.



К задаче 4.57.

4.54. $S=\frac{25}{16}\sqrt{15}$ $\left(AB=\frac{5}{2},\ AC=5\right)$.

4.55. $S=\frac{9}{2}\sqrt{3}$ $(AB=3\sqrt{3},\ BC=3,\ AC=6)$.

4.56. $S=32\sqrt{2}$ $(AC=8,\ BC=12)$.

4.57. $r=3$.

Решение. Пусть K — точка касания (см. рис.), $\angle NMC=\alpha$, тогда, по условию, $\angle MNC=2\alpha$, $\angle BMK=\pi-\alpha$, $\angle ANK=\pi-2\alpha$. Но

MO и NO — биссектрисы этих углов, поэтому $\angle OMK = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\angle ONK = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и, значит, $OK = OM \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{10}\cos\frac{\alpha}{2}$ и $OK = ON \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{15}{4}\cos\alpha$. Из уравнения

$$\sqrt{10}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{4}\cos\alpha = \frac{15}{4}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

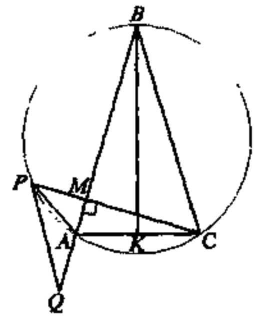
находим $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2 \pm 7}{3\sqrt{10}}$, откуда $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, так как $\frac{\alpha}{2}$ — острый угол. Отсюда $r = OK = 3$.

4.58. $r = \frac{3}{\sqrt{5}}$ $\left(\angle AMD = \angle ADM = \arcsin\frac{3}{5}\right)$.

4.59. $r = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

4.60. $r = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

4.61. $PA = \sqrt{\frac{15}{2}}$, $PQ = 6$.



К задаче 4.61.

Решение. Пусть K — середина отрезка AC, M — точка пересечения AB и PC (см. рис.), $\angle ABK = \angle CBK = \beta$, где $\beta = \arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$. Тогда $\angle ABC = \angle APC = 2\beta$ (эти углы опираются на одну дугу), $\angle ACP = \angle ABK = \beta$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами), $\angle APQ = \angle ACP = \beta$ (угол между касательной и хордой), $\angle PAQ = 2\beta + \frac{\pi}{2}$ (внешний угол в треугольнике APM) и поэтому $\angle AQP = \frac{\pi}{2} - 3\beta$. Применяя теорему синусов к треугольникам APC и APQ, получаем: $AP = AC\frac{\sin\beta}{\sin 2\beta} = \frac{5}{2\cos\beta}$, $PQ = AP\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\beta\right)} = AP\frac{\cos 2\beta}{\cos 3\beta}$. Так как $\cos\beta = \sqrt{\frac{5}{6}}$, $\sin\beta = \sqrt{\frac{1}{6}}$, $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{2}{3}$, $\cos 3\beta = \cos\beta\,(4\cos^2\beta - 3) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$, то $AP = \sqrt{\frac{15}{2}}$, $PQ = 6$.

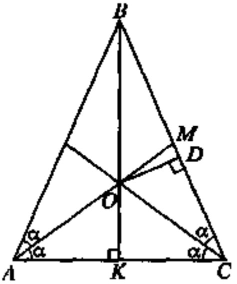
4.62. $CD = 2\sqrt{6}$, $DE = 5$.

4.63. $MC = 2\sqrt{5}$, $MN = 15$.

4.64. $KA = 2\sqrt{15}$, $KL = 7$.

4.65. Площадь треугольника ABC равна 176, проекция отрезка OM на прямую BC равна $2\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Решение. 1) Пусть S_1, S_2, S_3 и S — площади треугольников BOM, COM, COK и ABC соответственно (см. рис.). Тогда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{6} = \frac{BM}{MC}$. С

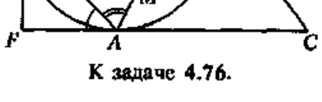


К задаче 4.65.

другой стороны, по свойству биссектрисы угла треугольника, $\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}$. Пусть $AK=KC=a$, $\angle BAO=\angle OAC=\angle BCO=\angle OCA=\alpha$. Тогда $a=AB\cos 2\alpha$ и поэтому $\frac{5}{6}=\frac{1}{2\cos 2\alpha}$, откуда $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Пусть $D\in BC$ и $OD\perp BC$, тогда $OD=OK=r$, где r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности, поэтому $S_3=\frac{1}{2}KC\cdot r$, $S_1+S_2=\frac{1}{2}BC\cdot r$ и, следовательно, $\frac{S_3}{S_1+S_2}=\frac{KC}{BC}=\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$, откуда $S_3=33$ и $S=2(S_1+S_2+S_3)=176$.

2) По построению DM — проекция OM на BC. Заметим, что точка D расположена либо на отрезке BM, либо на отрезке MC. В первом случае $DM=OD\operatorname{ctg}\angle AMC=OD\operatorname{ctg}(\pi-3\alpha)=-OD\operatorname{ctg}3\alpha$, во втором случае $DM=OD\operatorname{ctg}\beta$, где $\beta=\angle OMB=3\alpha$ (по свойству внешнего угла в треугольнике AMC). Тогда $DM=OD\,|\operatorname{ctg}3\alpha|$, где $\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{2}{11}$, так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{4}{3}$. Поэтому $DM=\frac{2\,OD}{11}=\frac{2}{11}r$. Радиус вписанной окружности найдем из треугольника COK: $S_3=\frac{1}{2}OK\cdot KC=\frac{1}{2}r\cdot KC=\frac{1}{2}r^2\operatorname{ctg}\alpha$, т. е. $33=\frac{1}{2}r^2\cdot 2$ и $r=\sqrt{33}$, таким образом, $DM=\frac{2\sqrt{33}}{11}$.

4.66. $S=\frac{78}{23}$; $p=\frac{324}{299}$.



К задаче 4.76.

4.67. $S=234$; $p=6\sqrt{\frac{6}{13}}$.

4.68. $S=\frac{260}{37}$; $p=\frac{5500}{481}$.

4.69. $2\sqrt{3}$.

4.70. 3.

4.71. 2.

4.72. 4.

4.73. 24.

4.74. 12.

4.75. 42.

4.76. 78.

Решение. Пусть E, F и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки K на прямые BC, AC и AB соответственно (см. рис.). Так как $\angle KBE=\angle KAB$, то $\Delta KAM\sim\Delta KBE$, откуда следует, что

$$\frac{KM}{KA}=\frac{KE}{KB},\qquad(1)$$

где $KE=156$.

Аналогично, из подобия треугольников KAF и KBM следует, что

$$\frac{KM}{KB}=\frac{KF}{KA}, \qquad (2)$$

где $KF=39$.

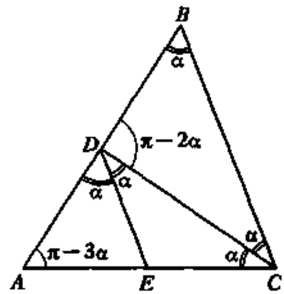
Перемножая равенства (1) и (2), получаем

$$KM^2=KE\cdot KF=39\cdot 156,$$

откуда $KM=78$.

4.77. $BC=3,\ S=\frac{27\sqrt{7}}{20}$.

4.78. $CD=\frac{2}{3},\ S=\frac{3\sqrt{7}}{20}$.



К задаче 4.78.

Решение. Пусть $\angle BCD=\angle ACD=\alpha$, тогда $\angle CDE=\angle ADE=\alpha$, $\angle BDC=\pi-2\alpha$, $\angle BAC=\pi-3\alpha$, $\angle ABC=\alpha$ (см. рис.), $DC=2DE\cos\alpha=\frac{8}{9}\cos\alpha$.

Из ΔBDC по теореме синусов находим $\frac{BC}{\sin 2\alpha}=\frac{DC}{\sin\alpha}$, откуда $\cos^2\alpha=\frac{9}{6}$, $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $DC=\frac{2}{3}$.

Применив теорему синусов в треугольнике ADC, получаем

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha}=\frac{DC}{\sin 3\alpha},$$

где $\sin 3\alpha=\sin\alpha\,(3-4\sin^2\alpha)=\frac{5\sqrt{7}}{16}$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $AC=DC\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{4}{5}$.

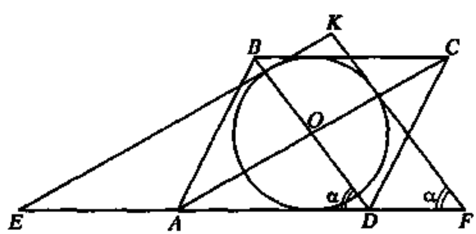
Искомая площадь $S=\frac{1}{2}BC\cdot AC\sin 2\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{20}$.

4.79. $CE=3,\ S=\frac{32\sqrt{5}}{7}$.

4.80. $AC=1,\ S=\frac{2\sqrt{5}}{7}$.

4.81. $\frac{25}{12}$.

4.82. $\frac{7}{6}$.



К задаче 4.82.

Решение. Центр O окружности совпадают с точкой пересечения диагоналей ромба $ABCD$ (см. рис.). Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то стороны KE и KF треугольника KEF, описанного около окружности, также перпендикулярны.

Пусть $\angle BDA=\angle KFE=\alpha$, r — радиус окружности, S и S_1 — площади ромба $ABCD$ и треугольника KEF соответственно. Тогда

$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3r = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 2a \sin \alpha \, 2a \cos \alpha$, где $a = 3$, т. е. $6r = 9 \sin 2\alpha$, откуда

$$r = \frac{3}{2} \sin 2\alpha. \qquad (1)$$

Аналогично, $S_1 = \frac{1}{2} KF \cdot KE = \frac{1}{2} 7 \sin \alpha \, 7 \cos \alpha = \frac{49}{4} \sin 2\alpha$. С другой стороны, $S_1 = \frac{1}{2} r(7 + 7 \sin \alpha + 7 \cos \alpha)$, откуда

$$r(1 + \sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{7}{2} \sin 2\alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$, откуда $1 + \sin 2\alpha = \frac{16}{9}$, $\sin 2\alpha = \frac{7}{9}$, $r = \frac{3}{2} \sin 2\alpha = \frac{7}{6}$.

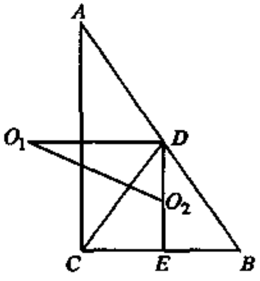
4.83. $\frac{49}{16}$.

4.84. $\frac{9}{8}$.

4.85. $\frac{5\sqrt{13}}{12}$.

4.86. $\frac{85}{48}$.

4.87. $\frac{5\sqrt{13}}{6}$.



К задаче 4.88.

4.88. $\frac{5\sqrt{34}}{12}$.

Решение.

Пусть O_1 — центр окружности радиуса R, описанной около треугольника ACD; O_2 — центр окружности радиуса r, вписанной в треугольник BCD, E — середина BC. Тогда $O_1D \perp AC$, $DE \perp BC$, $AB = 5$, $CD = BD = \frac{5}{2}$, $AC = 4$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $R = \frac{CD}{2 \sin A} = \frac{25}{12} = O_1D$.

Пусть S — площадь треугольника BCD, p — его полупериметр. Тогда $S = \frac{1}{4} AC \cdot BC = 3$, $p = 4$, $S = rp$, откуда $r = \frac{3}{4} = O_2E$, $DE = \frac{AC}{2} = 2$, $DO_2 = DE - O_2E = \frac{5}{4}$. Искомое расстояние

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1D^2 + DO_2^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{850}}{12} = \frac{5\sqrt{34}}{12}.$$

4.89. $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$.

Решение.

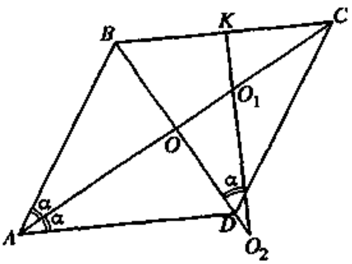
Пусть K — середина BC, O — точка пересечения AC и BD, O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников BCD и ABC соответственно (см. рис.).

Тогда O_1 и O_2 — точки пересечения перпендикуляра к BC в точке K с прямыми CO и BO соответственно.

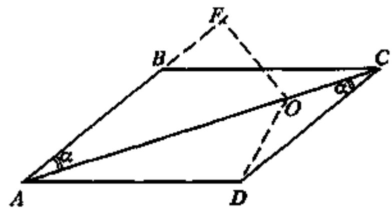
Пусть R и r — радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD соответственно, $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$, тогда $\angle BO_2K = \alpha$, $O_1C = r = \frac{3}{\cos\alpha}$, $OC = 6\cos\alpha$, $R = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha}$, $OO_1 = 8\sin\alpha$.

Так как $OC = OO_1 + O_1C$, то $6\cos\alpha = 8\sin\alpha + \frac{3}{\cos\alpha}$, $8\sin\alpha\cos\alpha + 3 = 6\cos^2\alpha$, $3\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 8\sin\alpha\cos\alpha = 0$.

Полагая $\operatorname{tg}\alpha = t$, получаем $3t^2 + 8t - 3 = 0$, откуда $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = -3$. Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $r = \sqrt{10}$, $R = 3\sqrt{10}$.



К задаче 4.89.



К задаче 4.93.

4.90. $\frac{7}{5}$.

4.91. $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$.

4.92. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

4.93. $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

Решение. Пусть O — центр окружности, R — ее радиус; F — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AB (рис); $\angle BAC = \angle ACD = \alpha$.

Тогда

$$OF = OC = OD = R,\ \sin\alpha = \frac{1}{3},$$

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Если $AB = CD = x$, $BC = AD = y$, S — площадь параллелограмма $ABCD$, то

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot AC\sin\alpha = \sqrt{2},$$

где

$$x = 2OC\cos\alpha = 2R\cos\alpha,\ AC = AO + OC = \frac{R}{\sin\alpha} + R = 4R.$$

Следовательно,

$$\sqrt{2} = 2R\cos\alpha\cdot 4R\cos\alpha = \frac{16\sqrt{2}}{9},$$

откуда $R = \frac{3}{4}$, $x = \sqrt{2}$.

Из ΔACD по теореме косинусов находим

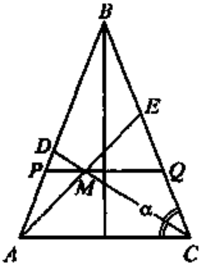
$$y^2 = 9 + 2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 3,$$

откуда $y = \sqrt{3}$.

4.94. 2, $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

4.95. 2, $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

4.96. 2, $\frac{8}{3}$.



К задаче 4.97.

4.97. $\frac{12}{7}$, $\frac{45\sqrt{2}}{28}$.

Решение. Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2},\ \cos\alpha = \frac{1}{3},\ \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$AB = BC = \frac{2}{\cos\alpha} = 6 \text{ (см. рис.)}.$$

а) По свойству биссектрисы в треугольнике ACE имеем

$$\frac{ME}{MA} = \frac{EC}{AC} = \frac{3}{4},$$

откуда $\frac{ME}{AE} = \frac{3}{7}$.

Из подобия треугольников MEQ и AEC следует, что

$$\frac{MQ}{AC} = \frac{ME}{AE} = \frac{3}{7},$$

откуда $MQ = \frac{12}{7}$.

б) Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника BPQ, тогда

$$R = \frac{BQ}{2\sin\alpha} = \frac{3}{2\sqrt{2}}BQ,$$

где

$$BQ = BE + EQ = 3 + EQ,\quad EQ = \frac{3}{7}EC = \frac{9}{7},\quad BQ = \frac{30}{7},\quad R = \frac{45\sqrt{2}}{28}.$$

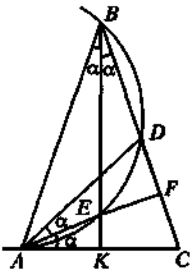
4.98. $\frac{16}{11}$, $\frac{14\sqrt{5}}{55}$.

4.99. $\frac{4}{3}$, $\frac{40\sqrt{7}}{63}$.

4.100. $\frac{10}{9}$, $\frac{7\sqrt{6}}{27}$.

4.101. $\frac{27\sqrt{2}}{8}$.

Решение. Пусть BK и AF — высоты в треугольнике ABC (см. рис.) и пусть $\angle ABK = \angle CBK = \alpha$, тогда $\angle FAC = \alpha$, $\angle DBE = \angle DAE = \alpha$ (эти углы опираются на одну и ту же дугу).



К задаче 4.101.

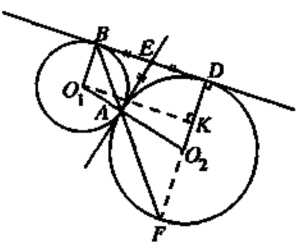
Из равенства прямоугольных треугольников DAF и CAF следует, что $AD = AC$. Найдем AC, пользуясь тем, что треугольники ADC и ABC подобны. Получим $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$, откуда $AC^2 = 4 \cdot 9$, $AC = 6$, $\sin\alpha = \frac{KC}{BC} = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Пусть R — радиус окружности, тогда $\frac{AD}{\sin 2\alpha} = 2R$, где $AD = 6$, $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, и поэтому $R = \frac{27\sqrt{2}}{8}$.

4.102. $\frac{16\sqrt{6}}{25}$.

4.103. $\frac{27\sqrt{2}}{16}$.

4.104. $\frac{27\sqrt{2}}{4}$.

4.105. $\sqrt{\frac{10}{3}}$, $\sqrt{\frac{15}{2}}$.



К задаче 4.105.

Решение. Заметим, что $AE = BE$ и $AE = DE$, так как касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны. Поэтому $BD = 2BE = 2\sqrt{5}$ (см. рис.). Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей C_1 и C_2, $O_1B = O_1A = x$, $O_2F = O_2A = y$, $AB = t$.

По теореме о касательной и секущей

$$AB(AB + AF) = BD^2,$$

т. е. $t(t + 3\sqrt{2}) = 20$ или $t^2 + 3\sqrt{2}t - 20 = 0$, откуда $t_1 = -5\sqrt{2}$, $t_2 = 2\sqrt{2}$, т. е. $t = AB = 2\sqrt{2}$.

Из подобия треугольников O_1AB и O_2AF следует, что $\frac{x}{t} = \frac{y}{3\sqrt{2}}$, откуда $x = \frac{2}{3}y$.

Для получения еще одного уравнения, связывающего x и y, воспользуемся теоремой Пифагора в треугольнике O_1O_2K, где K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую DO_2. Получим $O_1K = BD = \sqrt{(x+y)^2 - (y-x)^2} = 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{5}$, откуда $xy = 5$, где $x = \frac{2}{3}y$. Следовательно, $y^2 = \frac{15}{2}$, $y = \sqrt{\frac{15}{2}}$, $x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

Замечание. Можно показать, что точки D, O_2, F лежат на одной прямой и вместо теоремы о касательной и секущей применить теорему Пифагора к треугольнику BDF.

4.106. $2\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4.107. $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $3\sqrt{2}$.

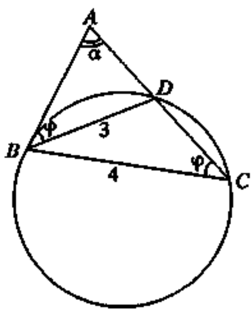
4.108. $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.109. $AB=\frac{12}{\sqrt{17}}$, $CD=\frac{7}{\sqrt{17}}$, $R=\frac{3\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$.

Решение. Обозначим $AB=x$, $AD=y$, $\angle BAD=\alpha$, $\angle ACB=\varphi$. Тогда $\angle ABD=\varphi$. Из подобия треугольников ABC и ABD (см. рис.) следует, что $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{BC}=\frac{3}{4}$, откуда $AC=\frac{4}{3}x$. Из треугольника ABC по теореме косинусов получаем

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha,$$

т. е. $16=x^2+\frac{16}{9}x^2-2x\cdot\frac{4}{3}x\cdot\frac{1}{3}=\frac{17}{9}x^2$, откуда $AB=x=\frac{12}{\sqrt{17}}$.



К задаче 4.109.

По свойству касательной и секущей $AB^2=AD\cdot AC$, т. е. $x^2=y\cdot\frac{4}{3}x$, откуда $AD=\frac{9}{\sqrt{17}}$, $DC=AC-AD=\frac{16}{\sqrt{17}}-\frac{9}{\sqrt{17}}=\frac{7}{\sqrt{17}}$.

Пусть R — радиус окружности, тогда $R=\frac{BD}{2\sin\varphi}=\frac{3}{2\sin\varphi}$. Из треугольника ABD по теореме синусов имеем $\frac{AD}{\sin\varphi}=\frac{BD}{\sin\alpha}$, где $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\varphi=\frac{AD\sin\alpha}{3}=2\sqrt{\frac{2}{17}}$, $R=\frac{3\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$.

4.110. $AC=32\sqrt{\frac{3}{35}}$, $BC=4\sqrt{\frac{6}{5}}$, $R=3\sqrt{\frac{7}{10}}$.

4.111. $AD=\frac{99}{5\sqrt{7}}$, $CD=\frac{76}{5\sqrt{7}}$, $R=\frac{16}{5}\sqrt{\frac{11}{7}}$.

4.112. $AB=\frac{6\sqrt{6}}{19}$, $BC=\frac{2\sqrt{22}}{19}$, $R=\frac{11\sqrt{3}}{38}$.

4.113. 1) $\frac{\sqrt{15}}{10}$; 2) $\frac{\sqrt{15}}{30}$.

Решение. Пусть $A_2B_2C_2$ — треугольник, образованный пересечением прямых AA_1, BB_1 и CC_1 (см. рис.), $\angle BAA_1=\angle CAA_1=\alpha$, $\angle ABB_1=\beta$. Тогда $\angle B_1BC=\angle C_1CA=\beta$, $\sin\beta=\cos 2\alpha=\frac{1}{4}$, $\cos\alpha=$ $=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $AC_1=AC\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}$, $AA_2=$ $=\frac{AC_1}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{2}{5}}$.

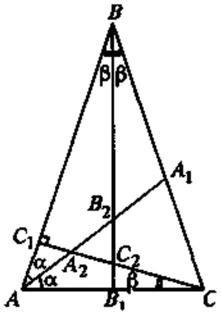
1) Если S_1 — площадь треугольника AA_2C, то $S_1=\frac{1}{2}AA_2\cdot AC\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{10}$.

2) Если S_2 — площадь треугольника $A_2B_2C_2$, то $S_2=\frac{1}{2}A_2B_2\cdot A_2C_2\cdot\sin\varphi$, где $\varphi=\angle B_2A_2C_2=\angle C_1A_2A=\frac{\pi}{2}-\alpha$, и поэтому $\sin\varphi=\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Так как $A_2B_2=AB_2-AA_2=\frac{AB_1}{\cos\alpha}-{}$ ${}-\frac{AC_1}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{2}{5}}$, $A_2C_2=CC_1-C_1A_2-CC_2=AC\cos\beta-AA_2\sin\alpha-{}$ ${}-\frac{B_1C}{\cos\beta}=\frac{2}{\sqrt{15}}$, то $S_2=\frac{\sqrt{15}}{30}$.

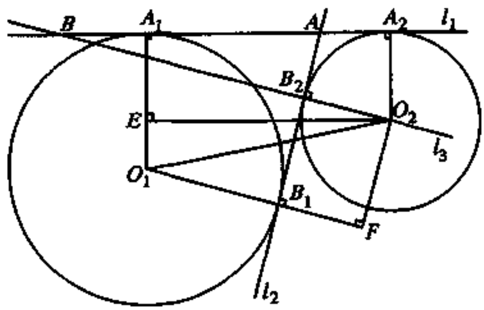
4.114. $\frac{3\sqrt{35}}{7}$, $\frac{4\sqrt{35}}{105}$.

4.115. $\frac{\sqrt{15}}{3}$, $\frac{4\sqrt{15}}{45}$.

4.116. $\frac{3\sqrt{35}}{7}$; $\frac{4\sqrt{35}}{105}$.



К задаче 4.113.



К задаче 4.117.

4.117. $A_1A_2=8$, $B_1B_2=4$, $AB_2=2$, $AB=10$, $BB_2=4\sqrt{6}$.

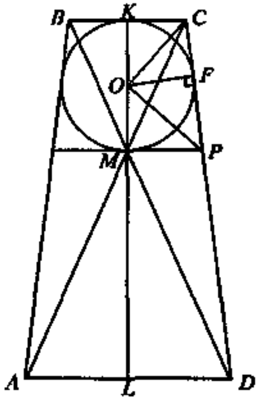
Решение. Пусть E и F — проекции точки O_2 на прямые O_1A_1 и O_1B_1 соответственно (см. рис.), $O_1A_1=O_1B_1=R$, $O_2A_2=O_2B_2=r$, $O_1O_2=l$. Тогда $O_1E=R-r$, $O_1F=R+r$ и из прямоугольных треугольников O_1EO_2 и O_1FO_2 находим $A_1A_2=\sqrt{l^2-(R-r)^2}=$ $=\sqrt{70-(\sqrt{6})^2}=8$, $B_1B_2=\sqrt{l^2-(R+r)^2}=\sqrt{70-(3\sqrt{6})^2}=4$. Обозначим $BB_2=a$, $AB_2=b$, $AB=c$. По свойству касательных имеем $AA_1=AB_1$, $AB_2=AA_2$, откуда $A_1A_2-b=B_1B_2+b$, $8-b=4+b$, $b=2$. Из подобия треугольников A_2BO_2 и B_2AB следует, что $\frac{O_2A_2}{BA_2}=\frac{AB_2}{BB_2}$, т. е. $\frac{r}{c+b}=\frac{b}{a}$, откуда $c+2=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. По свойству касательной и секущей, проведенных к окружности C_2 из точки B, имеем

$$a(a+2r)=(c+2)^2=\frac{3}{2}a^2,\ \text{откуда}\ a=4\sqrt{6},\ c=10.$$

4.118. $AA_1 = 7$, $B_1B_2 = 5$, $AB_1 = 6$, $AB = 12$, $BB_1 = 6\sqrt{3}$.

4.119. $A_1A_2 = 8$, $B_1B_2 = 4$, $AB_1 = 2$, $AB = \frac{14}{5}$, $BB_1 = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

4.120. $A_1A_2 = 7$, $B_1B_2 = 5$, $BB_2 = \frac{24\sqrt{3}}{11}$, $AB = \frac{78}{11}$, $AB_2 = 6$.



К задаче 4.121.

4.121. $r = \frac{7\sqrt[4]{18}}{16}$.

Решение. Пусть M — точка пересечения диагоналей трапеции (см. рис.), K и L — середины отрезков BC и AD, O — центр окружности радиуса R, F — точка касания окружности со стороной CD, $MP \| AD$, $P \in CD$. Обозначим $a = LD$, $b = KC$, тогда $LD = bt$, где $t = 9/7$.

Из подобия треугольников MCP и ACD, а также треугольников MDP и BDC следует, что

$$MP = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2bt}{1+t}. \qquad (1)$$

Так как $OC \perp OP$ (OC и OP — биссектрисы углов, сумма которых равна π), а $OF \perp CP$, то $OF^2 = PF \cdot CF = MP \cdot KC$ ($PF = MP$, $CF = KC$), т. е.

$$R^2 = MP \cdot b. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$(1+t)R^2 = 2b^2t. \qquad (3)$$

Площадь S трапеции $ABCD$ выражается формулой $S = (KC + LD)(KM + ML)$, где $\frac{ML}{KM} = \frac{a}{b} = t$, откуда $KM + ML = 2R(1+t)$,

$$S^2 = 4b^2R^2(1+t)^4. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) находим $R^4 = \frac{S^2 t}{2(1+t)^5}$, где $S = 8$, $t = \frac{9}{7}$, т. е. $R = \frac{7\sqrt[4]{18}}{16}$.

4.122. $\frac{7}{12}\sqrt[4]{\frac{10}{3}}$.

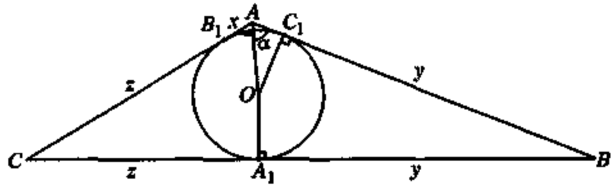
4.123. $r = \frac{4}{9}\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$.

4.124. $R = \frac{15}{16}\sqrt[4]{3}$.

4.125. $R = 26\sqrt{2} + 4$.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, в которых окружность с центром O касается сторон треугольника ABC (см. рис.). $AC_1 = x$, $BC_1 = y$, $CB_1 = z$, R — радиус описанной окружности, тогда

$\angle B_1AO = \angle C_1AO = \frac{3\pi}{8}$, $B_1A = x$, $BA_1 = y$, $CA_1 = z$, $BC = y + z$, $R = \frac{y+z}{2\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{y+z}{\sqrt{2}}$.



К задаче 4.125.

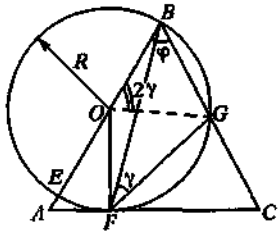
Обозначим $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = t$, тогда $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{2t}{1-t^2} = -1$, откуда $t = 1 + \sqrt{2}$, так как $t > 0$, $x = OC_1 \cdot \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} = \frac{4}{1+\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2} - 1)$. По условию $2(x + y + z) = 16(6 + \sqrt{2})$, откуда $y + z = 8(6 + \sqrt{2}) - x = 52 + 4\sqrt{2}$, $R = \frac{52 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 26\sqrt{2} + 4$.

4.126. $S = 20(\sqrt{2} - 1)$.

4.127. $r = \sqrt{3}$.

4.128. $R = 2(7\sqrt{3} - 1)$.

4.129. $R = \frac{a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)}$.



К задаче 4.129.

Решение. 1) Пусть O — центр окружности радиуса R, $\angle OBG = \varphi$ (см. рис.), тогда $\angle BOG = 2\gamma$, $2\varphi + 2\gamma = \pi$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma$, $\angle A = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}$. Из треугольника OAF находим $R = (R + a)\sin A$, откуда $R(1 - \sin A) = a\sin A$.

4.130. $R = \frac{a(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$.

4.131. $R = \frac{a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{3\gamma}{4}\right)}$.

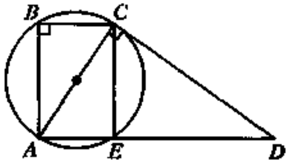
4.132. $R = \frac{3a}{\sqrt{10}}$.

4.133. 204.

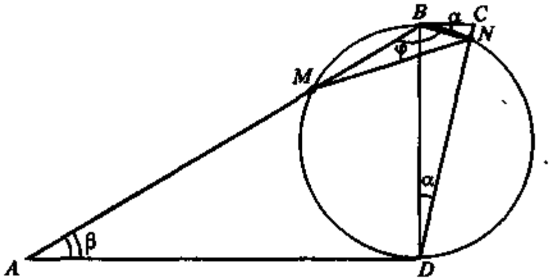
Решение. Так как окружность проходит через точки A и C, а ее центр принадлежит AC, то AC — диаметр окружности (см. рис.), откуда следует, что $\angle ABC = \angle AEC = \frac{\pi}{2}$, $ABCD$ — прямоугольник, $BC = 8$. По свойству касательной и секущей $CD^2 = (ED + AE)ED$, т. е. $ED^2 + 8ED - 36 \cdot 13 = 0$, откуда $ED = 18$.

По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, $CE^2 = AE \cdot ED$, т. е. $CE^2 = 8 \cdot 18$, откуда $CE = 12$.

Искомая площадь $S = \frac{BC + AD}{2} CE = \frac{8 + 26}{2} \cdot 12 = 204$.



К задаче 4.133.



К задаче 4.137.

4.134. 663.
4.135. 270.
4.136. 135.
4.137. $\angle MBN = \frac{3\pi}{4}$, $AD = \sqrt{6}$.

Решение. Так как $BC \| AD$ и окружность касается прямых BC и AD в точках B и D, то BD — диаметр окружности (см. рис.).

Обозначим $\angle MBN = \varphi$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, тогда $\angle NBC = \alpha$ (угол между касательной и хордой), $\alpha + \beta + \varphi = \pi$.

1) По теореме синусов $\frac{MN}{\sin\varphi} = BD$, откуда $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Но $\varphi = \angle MBD + \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $\angle MBD > \alpha$, так как $AD > BC$. Поэтому $\varphi > \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, так как $\alpha + \beta + \varphi = \pi$.

2) Площадь трапеции $S = 2 = \frac{1}{2}(AD + BC)BD$, где $AD = BD \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $BC = BD \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, откуда

$$2 = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) + \operatorname{ctg}\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta},$$

$$3\operatorname{tg}^2\beta = 1,\ \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{3}},\ AD = \sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta = \sqrt{6}.$$

4.138. $\angle MDN = \frac{2\pi}{3}$, $BC = 2\sqrt{7}$.

4.139. $\angle MBN = \frac{3\pi}{4}$, $AD = 2\sqrt{3}$.

4.140. $\angle MDN = \frac{2\pi}{3}$, $BC = 2\sqrt{21}$.

4.141. $\frac{633}{440}$.

Решение. Пусть O — центр окружности с радиусом R, описанной около треугольника ABC, K — середина AC, $\angle BCA = 2\alpha$ (см. рис.). Тогда $OB = R$, $OD \perp BC$, $\angle BOD = 2\alpha$, $KC = BC \cdot \cos 2\alpha = 5\cos 2\alpha$, $AC = 10\cos 2\alpha$, а искомое расстояние от точки O до прямой l равно OM, где M — точка пересечения OD и l.

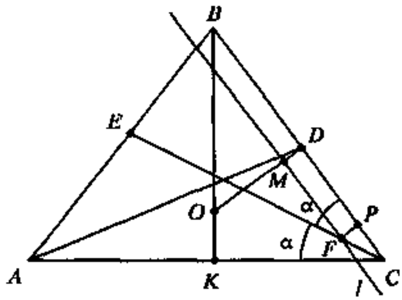
Из $\triangle ADC$ по теореме косинусов

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos 2\alpha, \text{ т. е.}$$

$$\frac{97}{4} = 100\cos^2 2\alpha + \frac{25}{4} - 2 \cdot 10\cos 2\alpha \cdot \frac{5}{2}\cos 2\alpha,$$

откуда $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $2R = \frac{AB}{\sin 2\alpha}$, $R = \frac{25}{8}$.

По свойству биссектрисы $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{6}$, откуда $AE = \frac{6}{11}AB = \frac{30}{11}$. Из $\triangle ADC$ по теореме синусов $\frac{EC}{\sin 2\alpha} = \frac{AE}{\sin\alpha}$, откуда $EC = AE \cdot 2\cos\alpha = \frac{24\sqrt{5}}{11}$, $FC = \frac{1}{5}EC = \frac{24}{11\sqrt{5}}$.



К задаче 4.141.

Проведем через точку F прямую, параллельную OD и пересекающую BC в точке P, тогда $FP = MD = FC \cdot \sin\alpha = \frac{24}{55}$, $OM = OD - MD$, где $OD = R \cdot \cos 2\alpha = \frac{15}{8}$.

Следовательно, $OM = \frac{15}{8} - \frac{24}{55} = \frac{633}{440}$.

4.142. $\frac{291}{250}$.

4.143. $\frac{279}{200}$.

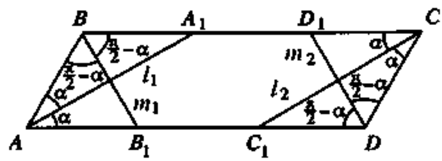
4.144. $\frac{21}{22}$.

4.145. $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Решение. Пусть A_1 и C_1 — точки пересечения прямых l_1 и l_2 со сторонами BC и AD (см. рис.), а B_1 и D_1 — точки пересечения прямых m_1 и m_2 со сторонами AD и BC. Обозначим $\angle BAD = 2\alpha$, $AB = a$, $BC = b$, h — расстояние между прямыми l_1 и l_2, d — расстояние между прямыми m_1 и m_2.

Тогда $\angle BAA_1 = \alpha$, $\angle ABC = \pi - 2\alpha$, $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, откуда следует, что $m_1 \perp l_1$. Но $l_2 \| l_1$, $m_2 \| m_1$ и поэтому $m_1 \perp l_2$, $m_2 \perp l_1$, $m_2 \perp l_2$.

Кроме того, $BA_1 = AB = a$, $DC_1 = DC = a$, так как $\angle BA_1A = \angle CC_1D = \alpha$. Следовательно, $\Delta ABA_1 = \Delta CDC_1$. Аналогично, $\Delta ABB_1 = \Delta CDD_1$ ($AB = CD$, $\angle ABB_1 = \angle D_1DC$, $\angle BAB_1 = \angle D_1CD$).



К задаче 4.145.

а) Пусть S, S_1, S_2 — площади параллелограммов $ABCD$, AA_1CC_1, BB_1DD_1, а S_3 и S_4 — площади треугольников ABB_1 и CCD_1. Тогда

$$S = 2S_3 + S_1 = 2S_4 + S_2,$$

где

$$S_1 = AA_1h = 2ah\cos\alpha, \quad S_2 = BB_1d = 2ad\sin\alpha,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}a^2\sin(\pi - 2\alpha) = \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha, \quad S_4 = \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha.$$

Следовательно, $S_1 = S_2$, т. е. $h\cos\alpha = d\sin\alpha$, где $h = d\sqrt{3}$.

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{d} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\angle BAD = 2\alpha = \frac{\pi}{3}$.

б) Найдем радиус r окружности, вписанной в треугольник ABD, используя формулу $r = \frac{\sigma}{p}$, где σ — площадь треугольника ABC, p — его полупериметр.

По условию $AC = \sqrt{\frac{22}{3}}$, $BD = 2$. Применяя теорему косинусов к треугольникам ABC и ABD, получаем

$$\frac{22}{3} = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - 2\alpha) = a^2 + b^2 + ab,$$

$$4 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 - ab.$$

Отсюда находим $ab = \frac{5}{3}$, $a^2 + b^2 = \frac{17}{3}$, $a + b = 3$,

$$p = \frac{a+b+BD}{2} = \frac{5}{2},\ \sigma = \frac{1}{2}\, ab \sin 2\alpha = \frac{5}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{12},\ r = \frac{\sigma}{p} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

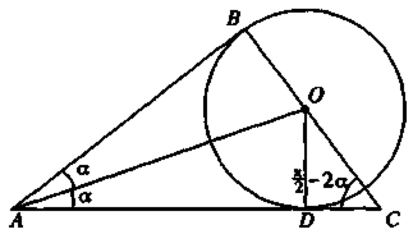
4.146. $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

4.147. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

4.148. $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4.149. $\frac{R^2}{8\sqrt{2}}(1+\sqrt{5})^{5/2} = \frac{R^2}{4}(1+\sqrt{5})(\sqrt{\sqrt{5}+2})$.

Решение. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, D — точка касания окружности с гипотенузой AC (см. рис.). Тогда $OB = OD = R$, $\angle BOA =$



К задаче 4.149.

$= \angle OAD = \alpha$, $AB = AD = R \operatorname{ctg} \alpha$, $\angle BCA = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, $DC = R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = R \operatorname{tg} 2\alpha$. Если S — площадь треугольника AOC, то $S = \frac{1}{2}\, AD\cdot R + \frac{1}{2}\, DC\cdot R$, т. е.

$$S = \frac{R^2}{2}(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha). \qquad (1)$$

Обозначим $\varphi(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha$, тогда

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{2}{\cos^2 2\alpha} = -\frac{\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Решая уравнение $\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1 = 0$, равносильное уравнению $\varphi'(\alpha) = 0$, получаем $\cos 2\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, откуда следует, что $-\cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha + 1 = \left(\cos 2\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \cos 2\alpha\right)$. Если $2\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то уравнение $\varphi'(\alpha) = 0$ имеет единственный корень α_0 такой, что $\cos 2\alpha_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, причем $\varphi'(\alpha) < 0$ при $\alpha < \alpha_0$ и $\varphi'(\alpha) > 0$ при $\alpha > \alpha_0$, так как $\cos 2\alpha$ — убывающая функция. Следовательно при $\alpha=\alpha_0$ функция $S(\alpha)$ принимает наименьшее значение $S_{\min}=\frac{R^2}{2}(\operatorname{ctg}\alpha_0+\operatorname{tg}2\alpha_0)$.

Но $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Так как $\cos 2\alpha_0=\frac{\sqrt5-1}{2}$, то $\cos\alpha_0=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt5+1}}{2}$, $\sin\alpha_0=\sqrt{1-\frac{1+\sqrt5}{4}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt5}{4}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt5}{8}}=\sqrt{\frac{(\sqrt5-1)^2}{8}}=\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt2}=$ $=\frac{\sqrt2}{\sqrt5+1}$, $\operatorname{ctg}\alpha_0=\frac{(\sqrt5+1)^{3/2}}{2\sqrt2}$, $\cos 2\alpha_0=\frac{2}{\sqrt5+1}$. Следовательно,

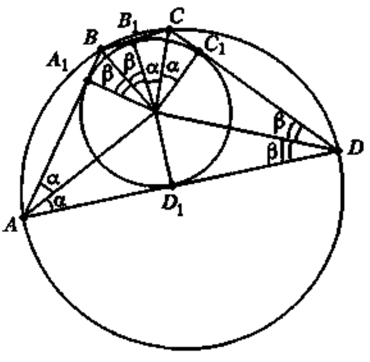
$$S_{\min}=\frac{R^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha_0}{\cos 2\alpha_0}=\frac{R^2}{2}\cdot\frac{(\sqrt5+1)^{3/2}}{2\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt5+1}{2}=\frac{R^2}{8\sqrt2}(1+\sqrt5)^{5/2}.$$

4.150. $\frac{3\sqrt3}{2}R^2$.

4.151. $\frac{R(1+\sqrt5)^{5/2}}{4\sqrt2}=\frac{R}{2}(1+\sqrt5)(\sqrt{\sqrt5+2})$.

4.152. $3\sqrt3\,R$.

4.153. 57; $\arcsin\frac{19}{20}$.



К задаче 4.153.

Решение. Пусть O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, A_1, B_1, C_1, D_1 — точки касания этой окружности со сторонами четырехугольника (см. рис.). Обозначим $\angle BAC=2\alpha$, $\angle CDA=2\beta$, тогда $\angle A_1AO=$ $=\angle D_1AO=\alpha$, $\angle C_1DO=\angle D_1DO=$ $=\beta$. Будем считать, что $\angle A=$ $=2\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

По свойству вписанного в окружность четырехугольника $\angle BAD+$ $+\angle BCD=\angle ABC+\angle ADC=\pi$.

Отсюда следует, что $\angle B_1OC=$ $=\angle C_1OC=\alpha$, $\angle BOA_1=\angle BOB_1=\beta$.

Так как $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{4}{3}$, то $\frac{4}{3}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, т. е. $2\operatorname{tg}^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha-2=0$, откуда $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=2$. Кроме того, $OA_1=OB_1=OC_1=OD_1=1$.

Пусть S — площадь четырехугольника $ABCD$, тогда

$$S=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\beta. \qquad (1)$$

Это сумма площадей четырех пар прямоугольных треугольников, каждая пара состоит из равных треугольников.

Пусть $\operatorname{tg}\beta = a$, $\operatorname{ctg}\beta = b$, тогда $AB = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 2 + a$, $AD = 2 + \operatorname{ctg}\beta = 2 + b$. по теореме косинусов

$$BD^2 = (2 + a)^2 + (2 + b)^2 - 2(2 + a)(2 + b)\cos 2\alpha,$$

где $\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{3}{5}$, откуда

$$BD^2 = a^2 + b^2 + 4(a + b) + 8 - \frac{6}{5}(4 + 2(a + b) + ab).$$

Так как $ab = \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta = 1$, то $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (a + {}$ ${}+ b)^2 - 2$.

Полагая $a + b = x$, получаем

$$BD^2 = x^2 + \frac{8}{5}x. \qquad (2)$$

С другой стороны, по теореме синусов $\frac{BD}{\sin 2\alpha} = 2\sqrt{6}$, так как треугольник ABD вписан в окружность радиуса $\sqrt{6}$.

Отсюда

$$BD^2 = 24\sin^2 2\alpha = 24\cdot\frac{16}{25}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{24}{5}\cdot\frac{16}{5} = 0,$$

откуда $x = \frac{16}{5}$, а по формуле (1) находим $S = \frac{5}{2} + a + b =$ $= \frac{5}{2} + x = \frac{57}{10}$.

Пусть φ — угол между диагоналями BD и AC, тогда

$$S = \frac{1}{2}BD\cdot AC\cdot\sin\varphi, \text{ где } BD = \frac{8\sqrt{6}}{5},$$

$\frac{AC}{\sin 2\beta} = 2\sqrt{6}$. Но $x = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta = \frac{2}{\sin 2\beta}$, откуда $\sin 2\beta = \frac{2}{x} = \frac{5}{8}$, $AC = \frac{5\sqrt{6}}{4}$, $\frac{57}{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{4}\sin\varphi$, $\sin\varphi = \frac{19}{20}$.

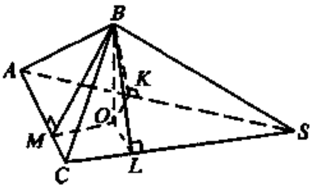
4.154. $\frac{98}{5}$; $\arcsin\frac{49}{50}$.

4.155. $\frac{73}{10}$; $\arcsin\frac{73}{80}$.

4.156. $\frac{93}{2}$; $\arcsin\frac{31}{32}$.

5. СТЕРЕОМЕТРИЯ

5.1. $\frac{2}{3}$.



К задаче 5.1.

Решение. Так как вершина конуса должна принадлежать всем трем плоскостям, касающимся его боковой поверхности, то она совпадает с одной из вершин пирамиды. Основание конуса принадлежит противолежащей этой вершине грани, а высота конуса совпадает с высотой пирамиды, опущенной на эту грань. Поскольку $\angle ABS = \frac{\pi}{2}$, $\angle SBC = \pi - (\angle BSC + \angle SCB) = \frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$, то вершина конуса совпадет с точкой B (см. рис.).

Образующие конуса, по которым происходит касание боковой поверхности конуса с гранями пирамиды, являются апофемами BK, BM и BL соответствующих граней, при этом

$$\angle SBL = \angle SBM = \frac{\pi}{2} - \angle BSC = \frac{5\pi}{12},$$

$$\angle KBA = \angle MBA = \angle SBA - \angle SBM = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12},$$

$$\angle KBC = \angle LBC = \frac{\pi}{2} - \angle LCB = \frac{\pi}{4}.$$

Так как $BM = BL = BK = 1$, то

$$AS = AM + SM = \operatorname{tg}(\angle ABM) + \operatorname{tg}(\angle MBS) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}.$$

Аналогично,

$$AC = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}, \quad SC = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Поэтому $AS = 4$, $AC = 3 - \sqrt{3}$, $SC = 3 + \sqrt{3}$, $p = \frac{AS + AC + SC}{2} = 5$, где p — полупериметр ΔASC. По формуле Герона

$$S_{\Delta ASC} = \sqrt{p(p-AS)(p-AC)(p-SC)} = \sqrt{5}.$$

Окружность основания конуса вписана в треугольник ASC, поэтому ее радиус $MO = \frac{S_{\Delta ASC}}{p} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Из прямоугольного треугольника BMO находим высоту

$$BO = \sqrt{BM^2 - MO^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

5.2. $5/18$.

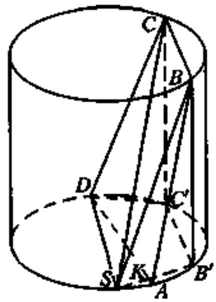
5.3. $2/3^{5/4}$.

5.4. $20\sqrt{2}$.

5.5. 2.

Р е ш е н и е. Заметим сначала, что если гипотенуза прямоугольного треугольника является хордой круга радиуса R, то расстояние ρ от вершины прямого угла этого треугольника до плоскости круга не превосходит R. В самом деле, $\rho \leqslant h \leqslant l \leqslant R$, где h — перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, $2l$ — длина гипотенузы.

По условию задачи ΔASD прямоугольный, а расстояние между плоскостями оснований цилиндра равно 2 и больше радиуса оснований, равного $\frac{5}{3}$. Поэтому, либо вершины A и D находятся на разных основаниях цилиндра, либо ΔASD лежит в плоскости одного из оснований.

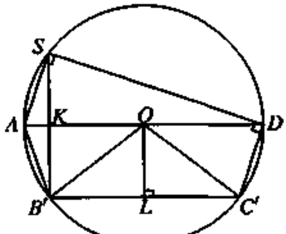


К задаче 5.5.

Первый случай невозможен, так как тогда плоскость $ABCD$ пересекает плоскости оснований цилиндра по параллельным прямым, то есть $AB \| CD$ и $ABCD$ — параллелограмм, а не трапеция.

Таким образом, вершины прямоугольного треугольника ASD находятся на окружности одного из оснований цилиндра, причем AD — диаметр (см. рис.), а точки B и C на окружности другого основания.

Пусть B' и C' — проекции точек B и C на плоскость ASD (см. рис.). Совпадение точек C' и D' невозможно, так как условие $BC \| AD$ влечет за собой в этом случае равенство $BC = AD$, что противоречит условию задачи.



К задаче 5.5.

Так как $\angle CDS = \frac{\pi}{2}$, то по теореме о трех перпендикулярах $C'D \perp SD$. Но тогда $ASDC'$ — прямоугольник и $AS = C'D$. Трапеция $AB'C'D$ вписана в окружность, следовательно $AB' = C'D$. Таким образом, $AB' = AS$ и $B'S \perp AD$. Обозначим через K точку пересечения AD и SB'. Тогда $B'K = SK$.

По условию задачи $AD = \frac{10}{3}$, $B'C' = BC = \frac{4}{5}AD = \frac{8}{3}$.

Из равнобедренного треугольника $B'OC'$ (OB' и OC' — радиусы, L — середина $B'C'$) находим:

$$SK = OL = \sqrt{(OC')^2 - (LC')^2} = 1.$$

Поскольку BB' перпендикулярна плоскости ASD, то плоскости SBB' и ASD перпендикулярны. Так как $AD \perp SB'$, то $AD \perp KB$, тогда

KB — высота трапеции $ABCD$, и $\angle BKB'$ является углом между плоскостями $ABCD$ и ASD.

Пусть h — высота пирамиды, опущенная из вершины S, тогда

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{6}(AD + BC) BK \cdot SK \sin \angle BKB' =$$

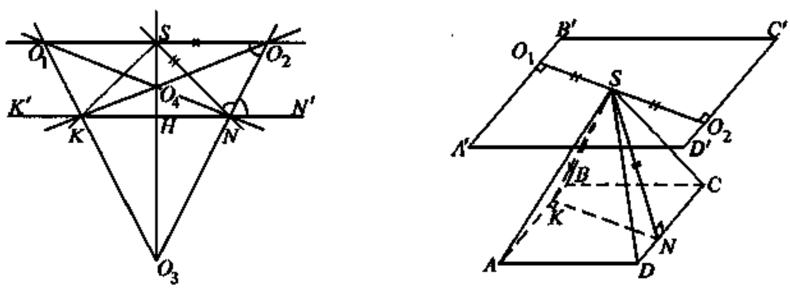
$$= \frac{1}{6}(AD + BC) SK \cdot BB' = 2.$$

5.6. 8/39.

5.7. 8.

5.8. 48/73.

5.9. Заметив, что центр сферы, касающейся двух пересекающихся плоскостей, лежит в биссекторной плоскости одного из двугранных углов, образованных этими плоскостями, найдем сначала множество точек, равноудаленных от плоскостей граней ASB, DSC и $ABCD$ (см. рис. *а*). Для этого проведем через апофемы SK и SN граней ASB и DSC плоскость α. Тогда $DC \perp \alpha$ и $AB \perp \alpha$, поэтому α перпендикулярна плоскостям ABS, DSC и $ABCD$.



а К задаче 5.9. *б*

Рассматриваемые биссекторные плоскости пересекают α по биссектрисам внутренних и внешних углов равнобедренного треугольника KSN (см. рис. *б*). Проведем все эти биссектрисы. Тогда в каждой из точек O_1, O_2, O_3, O_4, и только в них, пересекаются три биссектрисы (по одной из каждой вершины), причем $O_1O_2 \| KN$, $S \in O_1O_2$, $O_2S = SN = SK = SO_1$.

Отсюда следует, что точки, равноудаленные от плоскостей граней ASB, DSC и $ABCD$, находятся на прямых, проходящих через точки O_1, O_2, O_3, O_4 и параллельных ребрам AB и CD.

Отметим, что точки прямой, проходящей через O_4, не удовлетворяют условиям задачи, так как $O_4H = 2$, $HN = \frac{1}{2} KN = 2$, а, следовательно, $\angle HNS = \frac{\pi}{2}$, что невозможно. Это же утверждение справедливо и для точки O_3.

Таким образом, центр сферы может находиться только на прямых $A'B'$ и $C'D'$ (см. рис. *б*), причем высота пирамиды SH равна радиусу сферы, то есть $SH = 2$. Те же рассуждения, примененные к плоскостям граней SBC, SAD и $ABCD$, показывают, что центр сферы может находиться только в вершинах ромба $A'B'C'D'$ ($A'D' \| B'C' \| AD$), а точка S является центром этого ромба; $A'B'C'D' \sim ABCD$ с коэффициентом подобия $\frac{SN}{HN} = \sqrt{2}$.

Точки A' и C' не подходят, так как тогда $\frac{2\sqrt{2}AB}{3} = 2$ и $AB = \frac{3}{\sqrt{2}} < 4 = KN$.

Для точек B' и D' имеем

$$BH^2 = \frac{1}{2}B'S^2 = \frac{1}{2}(B'H^2 - SH^2) = \frac{4}{9}AB^2 - 2,$$

$$BH^2 = \frac{1}{4}BD^2 = \frac{1}{4}\left(\left(AB - \sqrt{AB^2 - 16}\right)^2 + 16\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(AB^2 - AB\sqrt{AB^2 - 16}\right)$$

Отсюда получаем $AB = 3\sqrt{2}$, $V = \frac{1}{3}AB \cdot KN \cdot SH = 8\sqrt{2}$.

5.10. $R = \frac{2}{5}$, $d = \frac{\sqrt{66}}{10}$.

5.11. $5/3$.

5.12. $R = 3$, $d = \sqrt{35}$.

5.13. $SE = \frac{12}{5}$, $BE = \frac{3}{5}$, $E = \beta \cap SB$.

5.14. $SE = \frac{7}{8}$, $CE = \frac{1}{8}$, $E = \alpha \cap SC$.

5.15. $SE = \frac{3}{7}$, $CE = \frac{13}{35}$, $E = \beta \cap SC$.

5.16. $SE = \frac{7}{3}$, $DE = \frac{5}{3}$. $E = \alpha \cap SD$.

5.17. $\sqrt{3}$.

5.18. $\sqrt{3} - 1$.

5.19. $\frac{3}{4}$.

5.20. $2\sqrt{3} - 2$.

5.21. $\frac{40}{3}$. Сечение — пятиугольник.

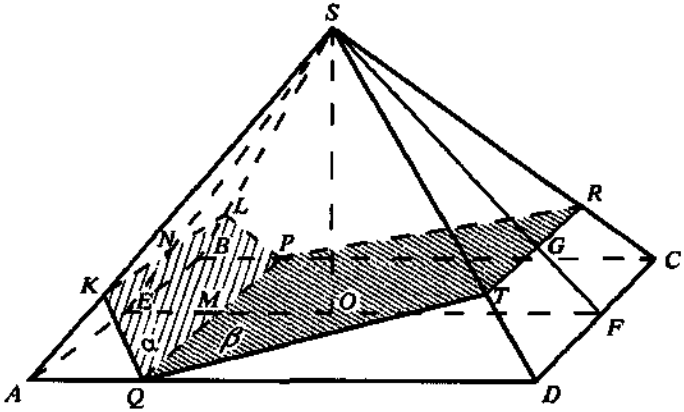
5.22. 12. Сечение — шестиугольник.

5.23. $\frac{27}{20}$. Сечение — пятиугольник.

5.24. 31. Сечение — шестиугольник.

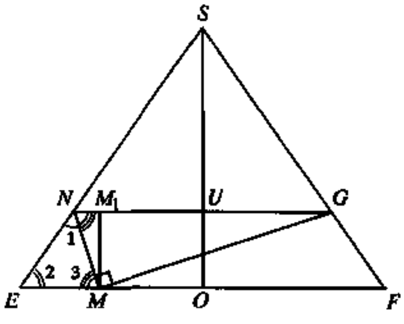
5.25. $\frac{3}{8}$ и $\frac{54}{49}$.

5.26. $\frac{23\sqrt{10}}{2}$ и $\frac{69\sqrt{10}}{2}$.



К задаче 5.26.

Решение. Пусть α — та из плоскостей, которая пересекает грань SAB, и KL — отрезок, по которому они пересекаются. Точки K и L не лежат на ребре AB (в противном случае плоскости α и ABC совпадают); положим, что $K \in SA$, $L \in SB$ (см. рис.). Если плоскость пересекает грани двугранного угла по параллельным прямым, то она параллельна ребру этого угла. Поэтому, если бы прямые LP и KQ были параллельны, то α совпала бы с плоскостью ABC. Итак, $KL \| PQ$, и, следовательно, эти прямые параллельны AB. Отсюда следует, что $AB = PQ = 13$. Аналогично получаем, что плоскость β пересекает грань SCD по отрезку RT, $RT \| CD$. По условию $KL = RT$, это означает, что точки K, L, R и T делят боковые ребра пирамиды в одинаковом отношении, и, значит, они лежат в плоскости, параллельной грани $ABCD$.



К задаче 5.26.

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью ESF, где E и F — середины ребер AB и CD (см. рис.). Эта плоскость перпендикулярна граням ASB, $ABCD$ и CSD, поэтому $\angle SEF = \angle SFE = \operatorname{arctg} 2$, $\angle MNE = \frac{\pi}{4}$, $\angle NMG = \frac{\pi}{2}$, где M, N, G — середины отрезков PQ, KL, RT соответственно. Из треугольника ENM, где $\operatorname{tg} \angle 1 = 1$, $\operatorname{tg} \angle 2 = 2$, получаем: $\operatorname{tg} \angle 3 = \operatorname{tg}(\pi - \angle 1 - \angle 2) = -\operatorname{tg}(\angle 1 + \angle 2) = 3$. Но $NG \| EF$, поэтому $\operatorname{tg} \angle MNG = 3$. Пусть MM_1 — высота прямоугольного треугольника NMG, $NM_1 = x$.

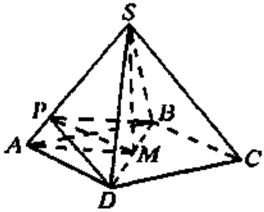
Тогда $MM_1 = 3x$, $M_1G = 9x$, $SU = 2NU = 10x$, $SO = 13x$. Но $SO = 2EO = EF = 13$, поэтому $x = 1$. Отсюда $MN = \sqrt{10}$, $MG = 3\sqrt{10}$ — высоты трапеций $KLPQ$ и $PRTQ$ с основаниями $PQ = 13$ и $KL = RT = LR = NG = 10$.

Итак, площади сечений равны $\frac{23}{2}\sqrt{10}$ и $\frac{69}{2}\sqrt{10}$.

5.27. Сечения — треугольник и трапеция; $S_{\text{треуг.}} = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, $S_{\text{трап.}} = 8\sqrt{\frac{5}{3}}$ ($AB = 6$, средняя линия треугольника ABC — их общее основание, другое основание трапеции — 5, $h_{\text{треуг.}} = 3\sqrt{\frac{3}{5}}$, $h_{\text{трап.}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$).

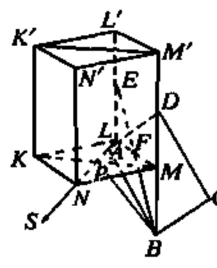
5.28. $S_1 = 51\sqrt{5}$, $S_2 = 102\sqrt{5}$ ($KL \| AD$, $AK = 5$, $BK = 14$, α образует с плоскостью ABC угол arctg 2; основания трапеций — 15 и 19, высоты — $3\sqrt{5}$ и $6\sqrt{5}$).

5.29. $\frac{\sqrt{21}}{4}$.



К задаче 5.29.

Решение. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на ребро SA (см. рис.). Тогда плоскость PBD перпендикулярна прямой SA, так как из равенства треугольников DSP и BSP следует, что и DP — перпендикуляр к SA. По условию прямые SA и LN совпадают, следовательно точки B и D лежат в плоскости, перпендикулярной прямой LN. Этой плоскостью является плоскость KMM' (см. рис.), в силу того, что точка D лежит на прямой MM', а прямая LN перпендикулярна пересекающимся прямым MM' и MK этой плоскости. Таким образом, точка B является точкой пересечения прямой EF и плоскости KMM', следовательно, точка B лежит на продолжении отрезка MM' за точку M и $BM = \frac{1}{2}MM'$. Далее, точка P лежит на прямой NL (SA) и $BP \perp LN$, поэтому, по теореме о трех перпендикулярах, $MP \perp LN$, следовательно, P — точка пересечения диагоналей ромба $KLMN$.



К задаче 5.29.

Наконец, точка P равноудалена от точек B и D, поэтому D — середина ребра MM', а точка M — середина отрезка BD — является центром основания $ABCD$ пирамиды.

Теперь искомое отношение находится несложными вычислениями.

Пусть $AB = a$, тогда, по условию, $SA = 2a$, поэтому $AM = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $SM = a\sqrt{\frac{7}{2}}$ и объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{14}}{6}a^3$. Далее, из треугольника SMA находим $MP = (SM \cdot AM):SA = a\frac{\sqrt{7}}{4}$. Отсюда следует, что

$MK=2MP=a\frac{\sqrt{7}}{2}$, $KN=a\frac{\sqrt{21}}{6}$ (KNL — равнобедренный треугольник, в котором $\angle KNM=120°$), площадь основания призмы равна $\frac{7\sqrt{3}}{24}a$, а ее высота $MM'=2MD=BD=a\sqrt{2}$. Таким образом, объем призмы равен $\frac{7\sqrt{6}}{24}a^3$, а искомое отношение равно $\frac{\sqrt{21}}{4}$.

5.30. $V_{\text{пр.}}:V_{\text{пир.}}=\frac{25\sqrt{3}}{16}$.

($KL\perp MN\Rightarrow M,N\in(DD')\Rightarrow MD'=\frac{1}{2}DD'$, $ND=\frac{3}{2}DD'$. Пусть $DT\perp AC$, $T\in[AC]$, $AD=3x$, $KL=2y\Rightarrow CD=4x$, $DT=\frac{12}{5}x$, $MN=3y$. $DT\perp MN$ и $DT\perp KL\Rightarrow DT=H\cdot LD/KL$, где H — высота пирамиды; $H=y\Rightarrow y=\frac{16}{5\sqrt{3}}x$; $V_{\text{пир}}=\frac{1024}{125}x^3$, $V_{\text{пр}}=\frac{64}{5}\sqrt{3}x^3$).

5.31. $V_{\text{пр.}}:V_{\text{пир.}}=\frac{21\sqrt{3}}{100}$.

($SB\perp AC\Rightarrow A,C\in(LML')\Rightarrow A\in LL'$, $AL=LL'$, $C=L'$. Пусть $LL'=b\Rightarrow AC=2b$, $AB=b\sqrt{2}$, $SA=5b\sqrt{2}$; $SL=7b$, $QL\perp AC$ и $QL\perp SB\Rightarrow QL\cdot SB=SL\cdot BL$, $QL=\frac{7b\sqrt{2}}{10}$, $ML=\frac{7b\sqrt{2}}{5}$, $V_{\text{пр.}}=\frac{49\sqrt{3}}{50}b^3$, $V_{\text{пир.}}=\frac{14}{3}b^3$).

5.32. $V_{\text{пр.}}:V_{\text{пир.}}=\frac{15}{8}\sqrt{3}$.

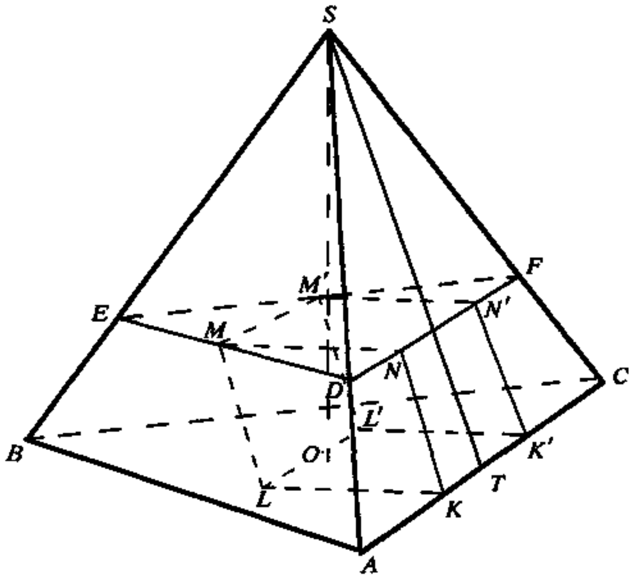
($AB\perp CD\Rightarrow C\in(TQD)$, где $QT\perp PR\Rightarrow C\in QQ'$, $CQ=QQ'$, $QT\perp AB$, $QT\perp CD\Rightarrow D=Q'$. Пусть $PQ=x$, $AB=2y\Rightarrow QR=3x$, $TQ=\frac{3x}{\sqrt{10}}$, $CD=3y$; $TQ\cdot AB=AO\cdot BQ$, где AO — высота пирамиды; $AO=y\Rightarrow TQ=\frac{3\sqrt{3}}{4}y\Rightarrow x=\frac{\sqrt{30}}{4}y$, $V_{\text{пр.}}=\frac{135}{32}y^3$, $V_{\text{пир.}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}y^3$).

5.33. $\frac{5\sqrt{6}}{36}$.

Решение. Пусть $SABC$ — данная пирамида, а $KLMNK'L'M'N'$ — искомая призма наибольшего объема. В силу того, что плоскость основания и плоскость боковой грани пирамиды не параллельны и не перпендикулярны, ее основанию и боковой грани могут принадлежать только две соседние боковые грани призмы. В этом случае общее ребро KK' этих граней призмы принадлежит ребру основания пирамиды (см. рис.).

Кроме того, из перпендикулярности прямой KK' и плоскости LKN следует, что $\angle NKL$ — это угол α между гранями ABC и ASC, равный $\operatorname{arctg}2\sqrt{6}$ (если SO — высота пирамиды, T — середина AC, то $SO=2\sqrt{2}$, $OT=\frac{1}{3}BT=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{1}{\sqrt{3}}$).

Призма имеет максимальный объем, когда вершины M и M' принадлежат граням SAB и SCB. Пусть DEF — сечение пирамиды плоскостью $M'MN$, $KL=x$, $SE=ySB$. Плоскость DEF делит высоту SO точкой P в отношении $y:(1-y)$, считая от вершины S, поэтому



К задаче 5.33.

$PO = 2\sqrt{2}(1-y)$. С другой стороны, $PO = KN\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}x$, следовательно, $y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{5}x$. Далее, $DF = yAC = 2y$, $MN = x$, поэтому $DN = N'F = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и, значит, $NN' = 2y - \frac{2}{\sqrt{3}}x = 2 - \frac{16\sqrt{3}}{15}x$. Объем призмы $V = KL\cdot KN\sin\alpha\cdot NN' = = \frac{4\sqrt{2}}{25}(5\sqrt{3}x^2 - 8x^3)$. Эта функция при $x > 0$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{5\sqrt{6}}{36}$, когда $x = x_0 = \frac{5}{4\sqrt{3}}$.

5.34. $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

(Пусть a и H — ребро основания и высота пирамиды, α — острый угол ромба, h — высота призмы, y — ребро ее основания. Пусть плоскость верхнего основания призмы делит высоту пирамиды в отношении $x:(1-x)$, считая от вершины. Тогда $V = y^2\sin\alpha\cdot h$, где $y\cdot\sin\alpha = H\cdot(1-x)$, и $\frac{h}{2} + y + y\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}x$, $\frac{h}{2} + \frac{3}{2}y = 3x$, $y\frac{\sqrt{3}}{2} = = \sqrt{3}(1-x) \Rightarrow x = 1 - \frac{y}{2}$, $h = 6 - 6y$, $V = 3\sqrt{3}(y^2 - y^3)$, $y_0 = \frac{2}{3}$).

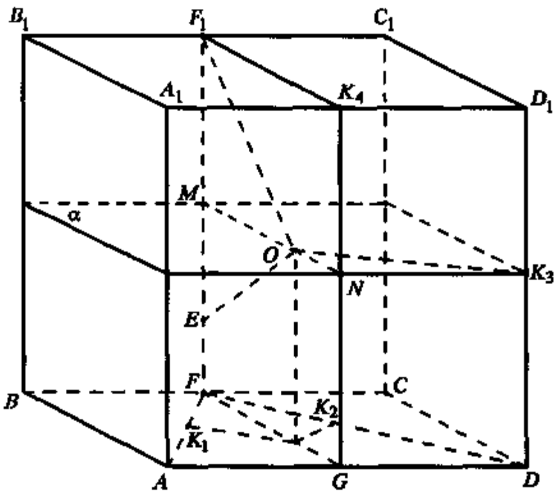
5.35. $\frac{16}{75\sqrt{3}}$.

(Пусть a и H — ребро основания и высота пирамиды, α — острый угол ромба, h — высота призмы, y — ребро ее основания. Пусть плоскость верхнего основания призмы делит высоту пирамиды в отношении $x:(1-x)$, считая от вершины. Тогда $V = y^2 \sin\alpha \cdot h$, где $y \cdot \sin\alpha = H(1-x)$, и $h = ax - \frac{2}{\sqrt{3}}\,y$, $h = 2x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,y$, $y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - x$, $h = 2 - \frac{5}{\sqrt{3}}\,y$, $V = \sqrt{3}y^2 - \frac{5}{2}\,y^3$, $y_0 = \frac{4}{5\sqrt{3}} > 0$).

5.36. $\frac{1}{9}$.

(Пусть a и H — ребро основания и высота пирамиды, α — острый угол ромба, h — высота призмы, y — ребро ее основания. Пусть плоскость верхнего основания призмы делит высоту пирамиды в отношении $x:(1-x)$, считая от вершины. Тогда $V = y^2 \sin\alpha \cdot h$, где $h \cdot \sin\alpha = H(1-x)$, и $\frac{h}{2} + y + y\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}\,x$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{h}{2} + \frac{4}{3}\,y = \sqrt{2}x$, $y\frac{2\sqrt{2}}{3} = 1 - x$, $h = 2\sqrt{2} - \frac{16}{3}\,y$, $V = \frac{8}{3}\left(y^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\,y^3\right)$, $y_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$).

5.37. $V = \frac{4}{3}\sqrt{2}$, $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(AB = \frac{3}{2},\ AA_1 = \frac{4}{3}\right)$.



К задаче 5.38.

5.38. $V = \frac{12}{15}$, $R = \frac{\sqrt{13}}{4}$ $\left(AB = 1,\ BC = \frac{3}{2},\ AA_1 = \frac{8}{5}\right)$.

Решение. Пусть O — центр сферы, K_1, K_2, K_3, K_4 — точки, в которых сфера касается звеньев ломаной $AFDD_1A_1$, G — середина ребра AD (см. рис.). Из соображений симметрии точка O лежит в плоскости GFF_1K_4, а из того, что точка O равноудалена от точек F_1 и E, следует, что она лежит в плоскости α, проходящей через точку M — середину отрезка $[F_1E]$ и перпендикулярной F_1F. Но из условия касания $OK_3 \perp D_1D$, следовательно, $K_3 \in \alpha$, и, значит, $K_3D_1 = MF_1 = \frac{1}{2}EF_1 = \frac{3}{4}$. По свойству касательных к сфере $D_1K_4 = D_1K_3$, отсюда $D_1A_1 = 2D_1K_4 = \frac{3}{2}$. Тогда $BC = \frac{3}{2}$, $A_1B_1 = AB = 1$, $FD = \frac{5}{4}$. Третье ребро параллелепипеда находим из теоремы о касательной и секущей: $FK_2^2 = FF_1 \cdot FE$. Пусть $DK_3 = x$, тогда $FM = DK_3 = x$, $F_1F = D_1D = x + \frac{3}{4}$, $FE = x - \frac{3}{4}$, $DK_2 = DK_3 = x$, $FK_2 = \frac{5}{4} - x$. Таким образом $\left(\frac{5}{4} - x\right)^2 = \left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)$, откуда $x = \frac{17}{20}$ и $D_1D = \frac{8}{5}$.

Пусть N — точка пересечения прямых MO и GK_4. В прямоугольных треугольниках OMF_1 и ONK_3 имеем $OF_1 = OK_3 = R$, $MF_1 = NK_3 = \frac{3}{4}$, поэтому $OM = ON$. Итак, $OM = \frac{1}{2}A_1B_1 = \frac{1}{2}$, $R = \sqrt{OM^2 + MF_1^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

5.39. $V = 18\sqrt{3}$, $R = \sqrt{7}$ $\left(AB = 4,\ BB_1 = \frac{9}{2}\right)$.

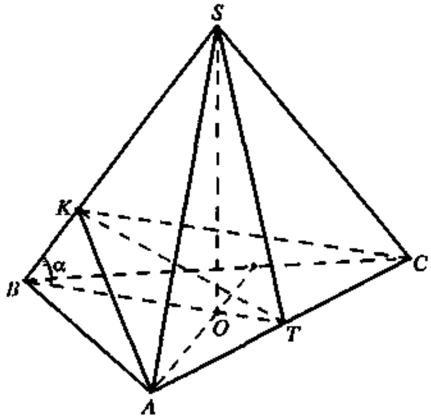
5.40. $V = \frac{9}{5}\sqrt{6}$, $R = \frac{\sqrt{7}}{2}$ $\left(AB = \sqrt{6},\ AD = 1,\ AA_1 = \frac{9}{5}\right)$.

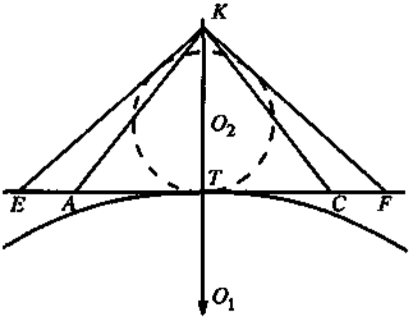
5.41. $V_{\text{цил}} : V_{\text{пир}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

5.42. $V = 70\pi$.

Решение. Пусть K — точка, в которой плоскость τ, проходящая через точку A и перпендикулярная ребру SB, пересекает это ребро (рис. *а*). Пусть O — центр основания пирамиды $SABC$, $\angle SBO = \alpha$. По условию $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}\sqrt{2}$, поэтому $\cos\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $BO = SB\cos\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{22}{3}}$, $AB = BO\sqrt{3} = \frac{2}{5}\sqrt{22}$. Пусть T — середина ребра AC, тогда $C, T \in \tau$, следовательно, TK — высота треугольника TSB, в котором $SB = \frac{11}{5}$, $TB = \frac{1}{5}\sqrt{66}$, а высота SO равна $\sqrt{\frac{11}{3}}$. Удвоенная площадь треугольника TSB равна $SO \cdot TB$ и равна $TK \cdot SB$, откуда $TK = \sqrt{2}$. Теперь из треугольника AKC находим $\operatorname{tg}\beta = \frac{AT}{TK} = \frac{\sqrt{11}}{5}$, где $\beta = \angle AKT = \frac{1}{2}\angle AKC$. Отсюда $\cos\beta = \frac{5}{6}$, $CK = TK/\cos\beta = \frac{6}{5}\sqrt{2}$.

Определим теперь расположение цилиндра. Если проекция цилиндра на плоскость ε является прямоугольником, то его ось параллельна ε. Таким образом, ось цилиндра параллельна плоскостям SAB и SBC, т. е. она параллельна прямой SB. Кроме того, точки T и S принадлежат плоскостям оснований цилиндра, поэтому его высота H рав-



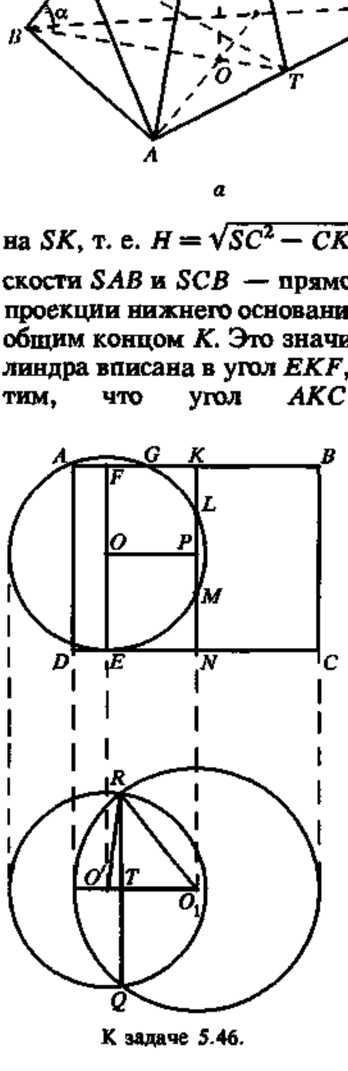


К задаче 5.42.

на SK, т. е. $H = \sqrt{SC^2 - CK^2} = \frac{7}{5}$. Далее, проекции цилиндра на плоскости SAB и SCB — прямоугольники с общей стороной SK, поэтому проекции нижнего основания цилиндра на эти плоскости — отрезки с общим концом K. Это значит, что окружность нижнего основани цилиндра вписана в угол EKF, где $EK \perp CK$, $FK \perp AK$ (см. рис. *б*). Отметим, что угол AKC — острый в силу того, что $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 > 0$. Итак основание цилиндра — либо окружность $S_1(O_1)$, либо окружность $S_2(O_2)$. Но цилиндр с основанием S_1 пересекает грань SAB, поэтому основание цилиндра — окружность S_2. Если $R = OP$ — ее радиус, то из ΔO_2PK находим $R = O_2K\cos\beta = (R + TK)\cos\beta =$

$= \frac{5}{6}(R + \sqrt{5})$, следовательно, $R = 5\sqrt{2}$.

По формуле $V = \pi R_2 H$ находим объем цилиндра.



К задаче 5.46.

5.43. $V_{\text{цил}} : V_{\text{пир}} = \frac{12\pi}{5\sqrt{5}}$.

5.44. $V = 9\pi$.

5.45. $V = \frac{441}{8}\pi$.

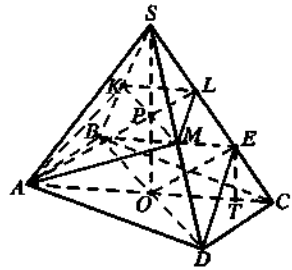
5.46. $V = 98\pi\sqrt{6}$.

Решение. Пусть A — общая точка сферы и окружности верхнего основания цилиндра, KN — ось цилиндра, O — центр сферы, E — точка касания сферой нижнего основания цилиндра. Точки A и E лежат в плоскости $\alpha=(OKN)$, сечение цилиндра плоскостью α — прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AD=H$, $AB=R_{ц}$, сечение сферы плоскостью α — окружность радиуса $R=R_{сф}$, проходящая через точку A, касающаяся стороны CD в точке E и пересекающая отрезок KN в точках L и M так, что $KL:LM:MN=1:6:2$, так как $KL<MN$ (см. рис.). Проекции сферы и цилиндра на плоскость основания цилиндра — круги, окружности которых пересекаются в точках R и Q, $RQ=8$ (сфера касается образующих цилиндра, их проекции — точки R и Q), а расстояние между центрами O' и O_1 кругов равно $EN=OP$, где P — середина $[LM]$. Пусть G — точка пересечения сферой отрезка $[AB]$ ($G\neq A$), F — точка пересечения прямых OE и AB. Тогда $OF\perp AB$, следовательно, F — середина отрезка $[AG]$. Пусть $KL=z$, $DE=AF=FG=x$, $KG=y$. Тогда $LM=6z$, $MN=2z$, $LP=3z$, $NP=R=5z$. По теореме о касательной и секущей $KG\cdot KA=KL\cdot KM$, т. е. $y(2x+y)=7z^2$; $NM\cdot NL=NE^2$, т. е. $(x+y)^2=16z^2$. Отсюда $x=3z$, $y=z$, $R_{ц}=2x+y=7z$, $O'O_1=NE=4z$. Пусть T — середина отрезка $[RQ]$. Тогда из $\Delta O'RO_1$ находим $(7z)^2=(5z)^2+(4z)^2-2\cdot 5z\cdot 4z\cos\beta$, где $\beta=\angle RO_1T$. Отсюда получаем $\cos\beta=\frac{1}{5}$, $\sin\beta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Тогда $5z=O'R=\frac{5}{2\sqrt{6}}RT$, поэтому $z=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $R_{ц}=7\sqrt{\frac{2}{3}}$, $H_{ц}=9z=3\sqrt{6}$.

5.47. $V=\frac{441}{64}\pi$.

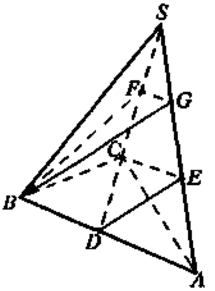
5.48. $V=\frac{49\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

5.49. $1:1:1$, $h=\frac{12}{5}$.



К задаче 5.49.

Решение. Пусть S_1 и S_2 — площади сечений, V, V_1, V_2 и V_3 — соответственно объемы пирамиды и частей, на которые пирамида разбивается плоскостями сечений считая от вершины. Пирамида и ее сечения симметричны относительно плоскости ASC (см. рис.), поэтому сечения — дельтоид $AKLM$ ($AK=AM$, $LK=LM$) и треугольник BED, где $AL\perp KM$, $OE\perp BD$ (O — центр основания пирамиды). Таким образом, $S_1=\frac{1}{2}KM\cdot AL$, $S_2=\frac{1}{2}BD\cdot OE$ и значит, $KM=\frac{1}{2}BD$, так как $AL=2OE$. Отсюда следует, что $SL=LE$, откуда $SL:LE:EC=1:1:1$, так как $LE=EC$. Это означает, что равны расстояния h: от точки S до плоскости $\alpha=(AKL)$, между плоскостями α и $\beta=(BED)$ сечений, от точки C до плоскости β. Отсюда следует, что $V_1 = V_3$, так как $S_1 = S_2$. Но $V_3 = \frac{1}{6} V$, так как площадь треугольника BCD вдвое меньше площади квадрата $ABCD$, а отношение высот ET и SO пирамид $EBCD$ и $SABCD$ равно $EC : SC = 1 : 3$. Поэтому $V_1 = V_3 = 8$, $V_2 = V - V_1 - V_2 = 32$. Найдем OE. Имеем: $OT : OC = SE : SC = 2 : 3$, поэтому $OT = 2$, $ET = \frac{1}{3} SO = \frac{8}{3}$, $OE = \frac{10}{3}$. Отсюда $S_2 = 10$ и из равенства $V_3 = \frac{1}{3} hS$ находим h.



К задаче 5.50.

5.50. $1 : 1 : 1$; $V_1 = V_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, $V_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}$; $h = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

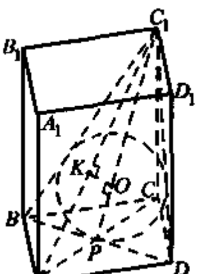
Решение. Сечения — треугольники CED и BFG (см. рис.), где $BG \| DE$, $FG \| CE$, $DE = \frac{1}{2} BG \Rightarrow FG = \frac{1}{2} CE \Rightarrow SG = GE = EA \Rightarrow$ $\Rightarrow V_1 = V_3 = \frac{1}{6} V$. Далее $CE = ED = \sqrt{3} =$ $= CD \Rightarrow S_1 = S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

5.51. $1 : 1 : 1$; $V_1 = V_3 = 1$, $V_2 = 4$; $h = \frac{6}{5}$.

5.52. $1 : 1 : 1$; $V_1 = V_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $V_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$; $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.53. $V = \frac{9\sqrt{14}}{20} \pi$.

Решение. Пусть O — центр окружности основания конуса, P — центр основания призмы (см. рис.). Из того, что треугольник BC_1D равнобедренный, следует, что $O \in C_1P$. Радиус $r = OP$ вписанной окружности находим по формуле $S = rp$, где S — площадь, p — полупериметр треугольника BC_1D. Имеем: $p = 8\sqrt{2}$ и $S = 24$, следовательно, $r = 3/\sqrt{2}$. Далее плоскость AC_1C перпендикулярна плоскости BC_1D основания конуса, поэтому она содержит вершину K конуса. Итак, $K \in (AC_1C) \cap (ABC_1)$, т. е. $K \in AC_1$. Высота KO конуса находится из треугольника KOC_1: $\angle KC_1O = \alpha = \beta - \gamma$, где $\operatorname{tg} \beta = AC/C_1C = 6/\sqrt{7}$, $\operatorname{tg} \gamma = PC/C_1C = 3/\sqrt{7}$, откуда $\operatorname{tg} \alpha =$ $= 3\sqrt{7}/25$ и $KO = \frac{3\sqrt{7}}{25} (C_1P - r) = \frac{3}{10\sqrt{14}}$. Объем конуса находим по формуле $V = \frac{1}{3} KO \cdot \pi r^2$.

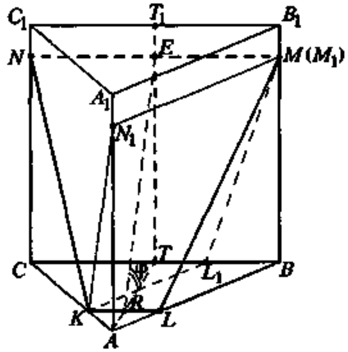


К задаче 5.53.

5.54. $V = \frac{15\sqrt{7}}{8} \pi$ $(r = \frac{3}{2}$, $h = \frac{5\sqrt{7}}{6}$, $K \in l$ — прямой, проходящей через точку S, $l \| BC)$

5.55. $V = \frac{\sqrt{7}}{9} \pi$ $(r = 1$, $h_{\text{кон}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $K \in l$, $l = AC_1)$.

5.56. $V = \frac{24}{5\sqrt{5}}\pi$ ($r = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $h_{\text{кон}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$, $K \in SP$, P — центр грани $ABCD$).



К задаче 5.57.

5.57. $V = \frac{3}{8}$.

Решение. Пусть M_1 и M_2 — многогранники, на которые рассекает призму плоскость сечения α, и около M_1 можно описать сферу, а около M_2 — нельзя, S_1 и S_2 — площади их поверхностей. Каждая грань вписанного в сферу многогранника — вписанный в окружность многоугольник, так как сечение сферы плоскостью грани — окружность, содержащая все вершины этой грани. С другой стороны, около прямоугольной трапеции нельзя описать окружность. Поэтому плоскость α пересекает грань AA_1C_1C призмы либо по отрезку $[KN]$, $N \in [CC_1]$ (см. рис.), либо по отрезку $[KN_1]$, $N_1 \in [AA_1]$ и, соответственно, треугольник KCN либо треугольник KAN_1 — грань многогранника M_1 (эта грань не может являться прямоугольником, так как в противном случае $\alpha \perp (ABC)$). Если плоскость α не пересекает ребро BB_1, то многогранник M_1 — треугольная пирамида, например, $NKCL_1$, но тогда $S_1 < S_2$. Таким образом, α пересекает ребро BB_1 и M_1 имеет два параллельных ребра, одно из которых лежит на прямой BB_1, другое — на одной из прямых AA_1 либо CC_1. Соответственно, гранью M_1 будет один из прямоугольников AN_1MB, либо $CNMB$. Отсюда следует, что α пересекает грань ABC по отрезку KL_1, $KL_1 \| AB$, либо по отрезку KL, $KL \| BC$. В первом случае

$$S_1 = S_{ABL_1K} + S_{KAN_1} + S_{L_1BM} + S_{ABMN_1} + S_{\text{сеч}} <$$
$$< \frac{7}{16}S_0 + \frac{1}{8}S_{\text{г}} + S_{\text{г}} + S_{\text{сеч}} < S_2,$$

где S_0 — площадь основания, $S_г$ — площадь боковой грани призмы. Таким образом, α пересекает призму по трапеции $KLMN$ ($KL \| MN$). Пусть T, T_1 — середины ребер BC и B_1C_1, R и E — точки пересечения плоскостью α отрезков AT и MN. По условию $\operatorname{tg} \angle ERT = \frac{7}{6}$, поэтому $TE = \frac{7\sqrt{3}}{16}$, значит,

$$S_{BCNM} = \frac{7\sqrt{3}}{16}, \ S_{KCN} = S_{LBM} = \frac{21\sqrt{3}}{128}, \ S_{BCKL} = \frac{15\sqrt{3}}{64}$$

и равенство $S_1 = S_2$ можно переписать в виде

$$\frac{15\sqrt{3}}{64} + \frac{21\sqrt{3}}{64} + \frac{7\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\sqrt{3}}{4} + 3AA_1\right).$$

Отсюда $AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $V = \frac{3}{8}$.

5.58. $V = 2100$ ($AA_1 = 7$, сечение — трапеция $MNKL$, $AM : MB = AN : CN = 2 : 3$, $BL : B_1L = CK : C_1K = 33 : 2$).

5.59. $V = \frac{3}{4}$ ($BB_1 = \sqrt{3}$, сечение — трапеция $DEFG$, $BE : B_1E = CF : C_1F = 11 : 1$, $AD : DB = AG : CG = 1 : 2$).

5.60. $V = \frac{132}{25}$ ($AA_1 = \frac{11}{25}$, сечение — трапеция $DEFG$, где $BE : AE = BD : CD = 1 : 4$, $AF : A_1F = CG : C_1G = 10 : 1$).

Решение. 1) Плоскость сечения α не может пересекать только одно из ребер AA_1, BB_1, CC_1.

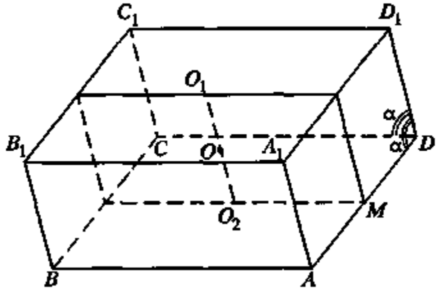
2) Плоскость α пересекает два из этих ребер, поэтому α параллельна одной из прямых AB или AC, значит, грань M_1, лежащая в плоскости ABC — вписанная трапеция, тогда она — равнобедренная трапеция, следовательно $\alpha \| AC$.

5.61. $BC = 5\sqrt{6}$, угол между плоскостями D_1DC и ABC равен $\arccos\frac{1}{5}$, расстояние от точки D до центра сферы равно 12.

Решение. Пусть $\angle D_1DA = \angle D_1DC = \alpha$, где α — острый угол (см. рис.). Тогда двугранные углы при ребрах DA и DC равны между собой и являются острыми (каждый из этих углов углов обозначим β).

Для доказательства этого утверждения достаточно построить проекцию L точки D_1 на плоскость $ABCD$, затем опустить из точки L перпендикуляры на AD и CD и воспользоваться равенством соответствующих прямоугольных треугольников.

Пусть O — центр вписанной в призму сферы, O_1 и O_2 — проекции точки O на грани $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$. Тогда $OO_1 = OO_2 = R$, где R — радиус сферы. Рассмотрим сечения Φ_1 и Φ_2 призмы плоскостями, перпендикулярными ребрам AD и DC. Фигуры Φ_1 и Φ_2 являются параллелограммами, каждый из которых описан около окружности радиуса R.



К задаче 5.61.

Поэтому фигуры Φ_1 и Φ_2 — ромбы, высота каждого из них равна $2R$, а острый угол равен β. Стороны этих ромбов равны соответствующим сторонам прямоугольника $ABCD$ и из равенства ромбов следует, что $ABCD$ — квадрат.

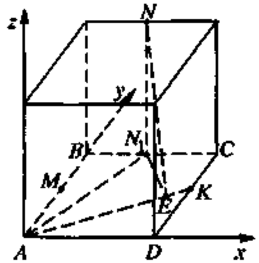
Пусть D_2 — проекция точки D_1 на плоскость $ABCD$, тогда $D_1D_2 = 2R$. Проведем через D_1D_2 плоскость, перпендикулярную DC и пересекающую DC в точке K. Тогда D_1D_2K, D_1D_2D и D_1DK — прямоугольные треугольники, $\angle D_1DD_2 = \gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt{13}}$ (по условию), $\angle D_1KD_2 = \beta$. Так как отрезок D_1K равен стороне ромба, т. е. $D_1K = CD$, то $D_1D_2 = 2R = D_1K\sin\beta = CD\sin\beta$. Последнее выражение в этой цепочке равенств равно высоте ромба Φ_1, $D_1D_2 = D_1K\sin\beta = DD_1\sin\alpha\sin\beta$ и $D_1D_2 = DD_1\sin\gamma$. Заметим еще, что точка D_2 лежит на диагонали квадрата $ABCD$ и поэтому $\angle D_2DK = \frac{\pi}{4}$, $D_1D_2 = DD_2\operatorname{tg}\gamma$, где $DD_2 = \frac{DK}{\cos\frac{\pi}{4}}$, $DK = DD_1\cos\alpha$, и поэтому $D_1D_2 = DD_1\frac{\operatorname{tg}\gamma\cos\alpha}{\cos\pi/4}$. Отсюда получаем $\sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma = \sqrt{2}\operatorname{tg}\gamma\cos\alpha$, где $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{13}}$, $\sin\gamma = 2\sqrt{\frac{3}{13}}$, $\operatorname{tg}\gamma = 2\sqrt{3}$, $\cos\alpha = \frac{\cos\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$, $\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos\beta = \frac{1}{5}$, $\beta = \arccos\frac{1}{5}$, $R = \frac{CD\sin\beta}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = 6$.

Рассмотрим, наконец, прямоугольные треугольники DOO_2, DMO_2 и DMO (M — точка, в которой одно из проведенных сечений пересекает ребро AD, т. е. является вершиной одного из построенных ромбов, см. рис.). Так как сфера касается граней двугранного угла при ребре DC, то $\angle OMO_2 = \frac{\beta}{2}$, $DO_2 = R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\frac{1}{\sin\pi/4}$, $DO = \sqrt{R^2 + DO_2^2}$. Подставляя найденные значения β и R, находим $DO = 12$.

5.62. $\angle C_1CD = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы равен $\arccos\frac{3}{\sqrt{17}}$, расстояние от точки C до точки касания шара с плоскостью AA_1D равно $4\sqrt{3}$.

5.63. $AD = 8$, угол между плоскостями AA_1B и ABC равен $60°$, расстояние от точки A до центра сферы равно $3\sqrt{13}$.

5.64. $\angle B_1BC = 60°$, угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{7}}$, расстояние от точки B до точки касания шара с плоскостью D_1DC равно $\sqrt{10}$.



К задаче 5.65.

5.65. $6\sqrt{\frac{17}{33}}$; $\frac{18}{\sqrt{53}}$; $\frac{66}{\sqrt{173}}$.

Решение. 1) Пусть N_1 — проекция точки N на плоскость $ABCD$ (см. рис.), E — основание перпендикуляра, опущенного из точки N_1 на AK, S_1 — площадь треугольника AN_1K, h_1 — расстояние от точки N до AK (NE перпендикулярен AK по теореме о трех перпендикулярах). Используя условия задачи, найдем площади S_2, S_3, S_4 треугольников ADK_1, KCN_1 и N_1BA и тогда $S_1 = 36 - (S_2 + S_3 + S_4) = 12$, $N_1E = \frac{2S_1}{AK}$, где $AK = 6\sqrt{1 + \frac{4}{9}} = 2\sqrt{13}$, $N_1E = \frac{12}{\sqrt{13}}$, $h_1 = \sqrt{NN_1^2 + EN_1^2} = 6\sqrt{\frac{17}{13}}$.

2) Для нахождения расстояния r между MN и AK воспользуемся формулой

$$r = \frac{6v}{AK \cdot MN \sin\varphi}, \tag{1}$$

где v — объем пирамиды $AMNK$, φ — угол между MN и AK. Введем систему координат, указанную на рис. Тогда $A(0; 0; 0)$, $M(0; 3; 0)$, $N = (3; 6; 6)$, $K(6; 4; 0)$, $\overrightarrow{MN} = (3; 3; 6)$, $\overrightarrow{AK} = (6; 4; 0)$, $\cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AK})|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AK}|} = \frac{3 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{6\sqrt{78}} = \frac{5}{\sqrt{78}}$, $\sin\varphi = \sqrt{\frac{53}{78}}$. Если S_0 — площадь треугольника AMK, то $S_0 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$, $v = \frac{1}{3} \cdot S_0 \cdot 6 = 18$ и по формуле (1) находим, что $r = \frac{18}{\sqrt{53}}$.

3) Если плоскость перпендикулярна вектору $\vec{n} = (a; b; c)$ и проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, то уравнение плоскости записывается в виде

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \tag{2}$$

а расстояние h от точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ до этой плоскости выражается формулой

$$h = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{3}$$

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости MNK, найдем, пользуясь тем, что $\vec{n} \perp \overrightarrow{MK}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$. Так как $\overrightarrow{MK} = (6; 1; 0)$, $\overrightarrow{MN} = 3(1; 1; 2)$, то

$$\begin{cases}(\vec{n}, \overrightarrow{MK}) = 6a + b = 0,\\ (\vec{n}, \overrightarrow{MN}) = 3(a + b + 2c) = 0.\end{cases}$$

Полагая $a = 2$, из этой системы найдем $b = -12$, $c = 5$, и поэтому $\vec{n} = (2; -12; 5)$. Взяв в качестве M_0 точку $M(0; 3; 0)$, запишем уравнение (2) в виде $2x - 12y + 5z + 36 = 0$, а затем по формуле (3) найдем расстояние h от точки $A_1(0; 0; 6)$ до плоскости MNK:

$$h = \frac{5 \cdot 6 + 36}{\sqrt{4 + 144 + 25}} = \frac{66}{\sqrt{173}}.$$

Замечание. Эту задачу проще решать с привлечением понятия «проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$». Пусть угол между вектором $\vec{a}$ и вектором $\vec{b}$ равен α, тогда проекция p вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ равна $p = |\vec{a}| \cos \alpha$, а так как $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, то $p = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$. Покажем, как решается задача 5.65 при помощи нахождения проекции.

1′) Найдем проекцию p_1 вектора $\overrightarrow{AN}$ на вектор $\overrightarrow{AK}$: $p_1 = \frac{(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AK})}{|\overrightarrow{AK}|}$. Так как $\overrightarrow{AN} = 3(1; 2; 2)$, $\overrightarrow{AK} = 2(3; 2; 0)$, то $p_1 = \frac{6(3 + 4 + 0)}{2\sqrt{9 + 4 + 0}} = \frac{21}{\sqrt{13}}$, тогда по теореме Пифагора $h_1 = \sqrt{AN^2 - p_1^2} = \sqrt{81 - \frac{21^2}{13}} = 6\sqrt{\frac{17}{13}}$.

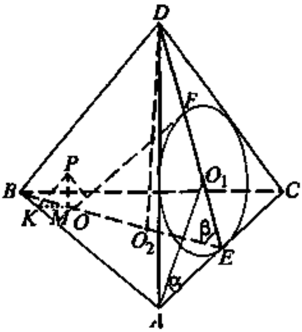
2′) Расстояние между скрещивающимися прямыми MN и AK равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые. Такое расстояние равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{AM}$ на направление нормали к указанным плоскостям (вместо вектора $\overrightarrow{AM}$ можно брать любой другой вектор с началом на одной и концом на другой плоскости). Вектор $\vec{n} = (a; b; c)$ нормали найдем из условия $\vec{n} \perp \overrightarrow{AK}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$, т. е.

$$\begin{cases}2(3a + 2b) = 0,\\ 3(a + b + 2c) = 0.\end{cases}$$

Отметим, что $\overrightarrow{AM} = (0; 3; 0)$, $\overrightarrow{AK} = 2(3; 2; 0)$ и $\overrightarrow{MN} = 3(1; 1; 2)$. Полагая $c = 1$, получим из системы $a = 4$, $b = -6$, т. е. $\vec{n} = (4; -6; 1)$, тогда $r = \frac{|(\vec{n}, \overrightarrow{AM})|}{|\vec{n}|} = \frac{3|b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{18}{\sqrt{53}}$.

3′) Расстояние h от точки A_1 до плоскости MNK равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{MA_1}$ на направление нормали $\vec{n}$ к плоскости MNK (вместо вектора $\overrightarrow{MA_1}$ можно взять любой другой вектор с концом в точке A_1 и началом, лежащим на плоскости MNK). Так как $\vec{n}=(2;-12;5)$, $\overrightarrow{MA_1}=(0;-3;6)$, то $h=\frac{|(\vec{n},\overrightarrow{MA_1})|}{|\vec{n}|}=$ $=\frac{36+6\cdot 5}{\sqrt{4+144+25}}=\frac{66}{\sqrt{173}}$.

5.66. $6\sqrt{\frac{13}{17}}$; $\frac{16}{\sqrt{77}}$; $\frac{36}{\sqrt{93}}$.



К задаче 5.69.

5.67. $3\sqrt{\frac{13}{2}}$; $\frac{9}{\sqrt{11}}$; $\frac{78}{\sqrt{197}}$.

5.68. $2\sqrt{5}$; $\frac{16}{\sqrt{101}}$; $\frac{28}{\sqrt{77}}$.

5.69. Радиус основания конуса $r=\frac{a}{4}$, радиус шара $R=\frac{a\sqrt{13}(8-3\sqrt{3})}{74\sqrt{3}}$.

Решение. 1) Пусть O_1 — центр основания конуса, r — радиус основания конуса, O_2 — центр грани ABC, E — середина AC, F — точка пересечения окружности основания конуса с DE (см. рис.), $\angle DAC=2\alpha$, $\angle BED=\beta$. Тогда $OO_1\perp DE$, $DO_2\perp BE$, $O_2E=BO=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $OF=OE=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\angle OFE=\beta$, $\angle O_1AE=\alpha$, $r=OE\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\beta=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $DE=\frac{a}{2}\operatorname{tg}2\alpha=$ $=\frac{a}{2\sqrt{3}}\frac{1}{\cos\beta}$, откуда $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}\cos\beta}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\beta$, $\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$, $4\operatorname{tg}^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{13}}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta=\sqrt{\frac{3}{13}}$, $r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{4}$.

2) Центр P вписанного шара лежит в плоскости BDE. Точка P равноудалена от OF и OB и принадлежит плоскости, делящей пополам двугранный угол при ребре AB.

Пусть R — радиус шара, M и K — проекции точки P на BE и AB соответственно (см. рис.). Тогда $\angle PKM=\frac{\beta}{2}$, $\angle BOP=$ $=\angle POF=\beta$ ($\angle BOF=2\beta$ по свойству внешнего угла треугольника FOE). Поэтому $OM=R\operatorname{ctg}\beta$, $KM=R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $BM=2KM=2R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

С другой стороны, $BM = BO - OM = \frac{a}{2\sqrt{3}} - R\operatorname{ctg}\beta$. Следовательно, $2R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}} - R\operatorname{ctg}\beta$, откуда

$$R = \frac{a}{2\sqrt{3}\left(2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\beta\right)}.$$

Так как $\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta} = \frac{4+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{(4+\sqrt{3})^2}{13}$, то $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ и $2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\beta = \frac{8+3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$; $R = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}(8+3\sqrt{3})} = \frac{a\sqrt{13}(8-3\sqrt{3})}{74\sqrt{3}}$.

5.70. Боковое ребро пирамиды равно $\frac{3a}{4}$, радиус шара $R = \frac{a(\sqrt{55}-\sqrt{33})}{16}$.

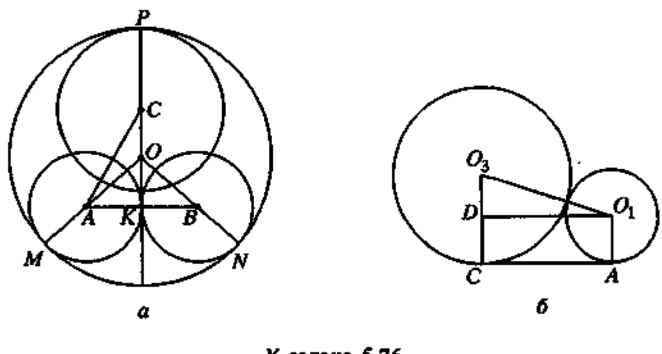
5.71. Радиус основания конуса $r = \frac{a}{2\sqrt{7}}$, радиус шара $R = \frac{2a(2\sqrt{21}-9)}{3}$.

5.72. Боковое ребро пирамиды равно $\frac{5a}{8}$, радиус шара $R = \frac{a\sqrt{33}(2-\sqrt{3})}{16}$.

5.73. $\frac{3(17+10\sqrt{3})}{44}r$.

5.74. $\frac{9}{4}r$.

5.75. $\frac{13+5\sqrt{7}}{8}r$.



К задаче 5.76.

5.76. $\frac{17+7\sqrt{7}}{12}r$.

Р е ш е н и е. Пусть A, B, C — проекции на основание цилиндра шаров радиусов r, r и $2r$ соответственно, O — центр основания цилиндра, K — середина AB, M, N и P — проекции на основание точек касания шаров с боковой поверхностью цилиндра (см. рис. a), O_1 и O_3 — центры шаров радиусов r и $2r$, D — середина CO_3 (см. рис. *б*). Тогда $O_1O_3 = 3r$, $O_1A = O_3D = r$, $O_1D = AC = \sqrt{9r^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$.

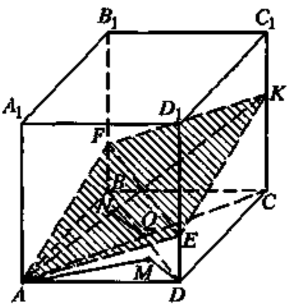
Пусть x — радиус основания цилиндра, тогда $OM = ON = OP = x$ (рис. *а*), $KC = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{8r^2 - r^2} = r\sqrt{7}$, так как $AK = AM = r$; $OC = OP - PC = x - 2r$, $OK = KC - OC = r(\sqrt{7} + 2) - x$, $OA = OM - AM = x - r$.

Из треугольника OAK по теореме Пифагора получим $OK^2 = OA^2 - AK^2$, т. е. $(r(\sqrt{7} + 2) - x)^2 = (x - r)^2 - r^2$, откуда найдем x.

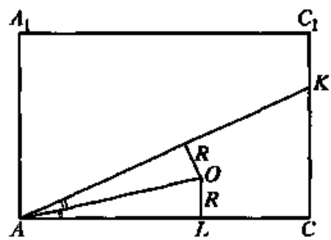
5.77. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$, $R_1 = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{4}$, $R_2 = \frac{a(\sqrt{3} + 1)}{4}$.

5.78. $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Решение. Плоскость P пересечет грань BB_1D_1D куба по прямой $EF \| BD$, где $E \in DD_1$, а ребро CC_1 — в некоторой точке K (см. рис. *а*). Пусть Q — середина BD, M и N — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек D и Q на плоскость P. Тогда $DM = QN$, так как $BD \| P$, и $N \in AK$.



а



б

К задаче 5.78.

По условию $\angle DAM = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$, $AD = a$, откуда находим $DM = AD\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = QN$. Из треугольника AQN, в котором $AQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $QN = \frac{AQ}{2}$, находим $\angle QAN = \frac{\pi}{6}$, и поэтому $AK = AC\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Пусть S — площадь сечения куба плоскостью P, тогда $S = \frac{1}{2}AK \cdot EF$, где $EF = BD = a\sqrt{2}$, и поэтому $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$.

Найдем радиус R вписанного шара. Заметим, что центр O шара лежит на биссектрисе угла KAC (см. рис. *б*), а проекция L точки O на грань $ABCD$ принадлежат AC.

Из треугольника AOL, в котором $\angle OAL = \frac{1}{2}\angle KAC = \frac{\pi}{12}$, $OL = R$, находим $AL = R\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$, где $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2+\sqrt{3}$. Так как $LC = R\sqrt{2}$, $AC = AL + LC$, то $a\sqrt{2} = R\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} + \sqrt{2}\right)$.

Замечание. Искомый радиус можно найти, заметив что он равен радиусу шара, вписанного в треугольную пирамиду KCE_1F_1, где E_1 — точка пересечения прямых KE и CD, F_1 — точка пересечения прямых KF и CB, используя формулу $R = \frac{3V}{S_п}$, где V — объем пирамиды KCE_1F_1, $S_п$ — ее полная поверхность.

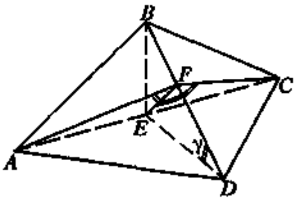
5.79. $S = \frac{3a^2}{16}$, $R_1 = \frac{a(3-\sqrt{3})}{8}$, $R_2 = \frac{a(3+\sqrt{3})}{8}$.

5.80. $S = a^2\sqrt{2}$, $R = \frac{a\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$.

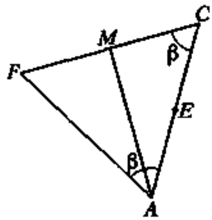
5.81. h, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2\pi}{3}$.

5.82. a, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

Решение. 1) Пусть E и F — середины ребер AC и BD соответственно (рис. $а$). Тогда $AF \perp BD$, так как $AB = AD$. Кроме того $BD \perp AC$ по условию. Следовательно, BD перпендикулярно к плоскости AFC и поэтому $CF \perp BD$.



а



б

К задаче 5.82.

Так как точка E равноудалена от плоскостей ABD и BCD, то плоскость BED делит пополам двугранный угол при ребре BD, а EF — биссектриса угла AFC (AFC — линейный угол этого двугранного угла, поскольку $AF \perp BD$ и $CF \perp BD$). Итак, EF — биссектриса и медиана треугольника AFC и поэтому $AF = FC$. Из равенства прямоугольных треугольников AFD и CFD следует, что $CD = AD = a$.

2) Перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость CBD, лежит в плоскости AFC, а его основание M — на прямой CF (рис. $б$). Поэтому $\angle FCA = \angle FAC = \beta$, где $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как $FA = FC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $AC = 2EC = 2FC\cos\beta = a\sqrt{2}$. Но $AC^2 = CD^2 + AD^2 = 2a^2$

(рис. a). Поэтому ΔADC — равнобедренный и прямоугольный, а $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$.

3) Основание перпендикуляра, опущенного из точки F на плоскость ACD, лежит на прямой DE. Поэтому угол между ребром BD и гранью ACD равен углу FDE (на рис. a этот угол обозначен γ). В треугольнике EFD имеем $ED = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $FD = \frac{a}{2}$, $EF = CF \sin\beta = \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$.

Применяя теорему косинусов для треугольника EFD, получаем $\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - 2\frac{a}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\gamma$, откуда $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

5.83. h, $\frac{\pi}{3}$, $\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

5.84. $a\sqrt{3}$, $\arccos\frac{1}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

5.85. $\frac{39}{4}$, $\frac{\pi}{6}$.

5.86. $\frac{13}{12}$, $\frac{\pi}{6}$.

5.87. $\frac{117}{2}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.88. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{13\sqrt{2}}{4}$.

Решение.

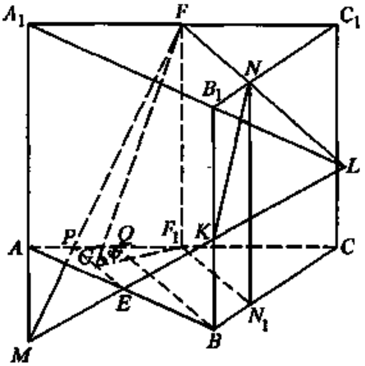
а) *Построение сечения.* Пусть E, F и K — середина ребер AB, A_1C_1 и BB_1 соответственно. Проведем:

а) прямые KE и AA_1 пересекающиеся в точке M;

б) прямую FM, пересекающую отрезок AC в точке P;

в) прямую A_1B_1, пересекающую прямую KE в точке L;

г) прямую FL, пересекающую ребро B_1C_1 в точке N (рис.).



К задаче 5.88.

Тогда $EPFNK$ — пятиугольник, получаемый в сечении призмы плоскостью, проходящей через точки E, F и K.

б) *Вычисление угла между плоскостью основания и плоскостью сечения* α.

Пусть F_1 — середина AC, G — основание перпендикуляра опущенного из точки F_1 на PE. Так FF_1 — перпендикуляр к плоскости ABC, а прямая PE перпендикулярна проекции F_1G наклонной FG, то $FG \perp PE$ (теорема о трех перпендикулярах).

Итак, прямые GF и GF_1, лежащие в плоскостях α и ABC соответственно, перпендикулярны PE — линии пересечения этих плоскостей. Поэтому $\angle FGF_1 = \varphi$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и ABC, а $\operatorname{tg}\varphi = \frac{FF_1}{F_1G}$.

Найдем F_1G.

Пусть $AB = a$, $BB_1 = h$. Тогда из равенства треугольников AME и KBE следует, что $AM = \frac{h}{2}$, а из подобия треугольников MAP и MA_1F находим: $\frac{AP}{A_1F} = \frac{MA}{MA_1} = \frac{1}{3}$, откуда $AP = \frac{1}{3}A_1F = \frac{a}{6}$.

Из треугольника APE, в котором $AP = \frac{a}{6}$, $AE = \frac{a}{2}$, $\angle PAE = \frac{\pi}{3}$, по теореме косинусов получаем

$$PE^2 = \frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{4} - 2\,\frac{a}{6}\,\frac{a}{2}\,\frac{1}{2},$$

откуда $PE = \frac{a\sqrt{7}}{6} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Пусть S, S_1 и S_2 — площадь треугольников ABC, AEF_1 и PEF_1 соответственно. Так как EF_1 — средняя линия в треугольнике ABC, то $S_1 = \frac{1}{4}S$, а $S_2 = \frac{2}{3}S_1 = \frac{1}{6}S$ $\left(AP = \frac{1}{3}AF_1\right)$. С другой стороны, $S_2 = \frac{1}{2}PE\cdot F_1G$, откуда

$$F_1G = \frac{2S_2}{PE} = \frac{\frac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a\sqrt{7}}{6}} = 2\sqrt{\frac{3}{7}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{F_1G} = \frac{\frac{\sqrt{42}}{7}}{2\sqrt{\frac{3}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}},\ \ \varphi = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

в) *Вычисление площади сечения.*

Пусть σ и σ_1 — площади соответственно сечения и его проекции на плоскости ABC. Тогда $\sigma = \frac{\sigma_1}{\cos\varphi}$.

Заметим, что проекцией сечения на плоскость ABC является пятиугольник PF_1N_1BE (N_1 — проекция точки N на плоскость ABC), в котором $F_1N_1 \parallel PE$, так как $F_1N_1 \parallel FN$, а $FN \parallel PE$.

Если Q — середина PF_1, то $PQ = QF_1 = AP = \frac{a}{6}$, PE — средняя линия в треугольнике ABQ и поэтому $PE \parallel BQ$, откуда следует, что $F_1N_1 \parallel BQ$, так как $F_1N_1 \parallel PE$.

Из подобия треугольников CF_1N_1 и CQB следует, что

$$\frac{CN_1}{CB} = \frac{CF_1}{CQ},\ \text{где } CB = a,\ CF_1 = \frac{a}{2},\ CQ = \frac{2}{3},$$

откуда находим $CN_1 = \frac{3}{4}a$.

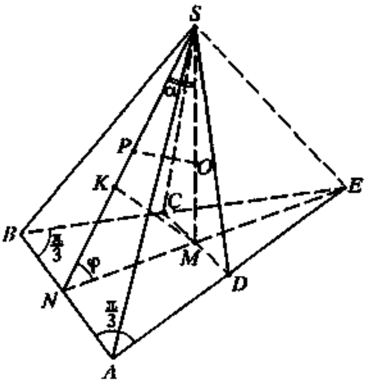
Пусть S_3 и S_4 — площади треугольников APE и CF_1N_1 соответственно. Тогда

$$S_3 = \frac{1}{3}S_1 = \frac{1}{12}S,\ S_4 = \frac{3}{4}\frac{S}{2} = \frac{3}{8}S,$$

$$\sigma_1 = S - (S_3 + S_4) = \frac{13}{24}S = \frac{13}{24}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{13\sqrt{3}}{6},$$

откуда $\sigma = \sigma_1\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{4}$.

5.89. $\frac{\sqrt{30}}{4}$, $\frac{\pi\sqrt{30}}{28}$.



К задаче 5.89.

Решение.

Пусть E — точка пересечения BC и AD, M и N — середины отрезков CD и AB соответственно (см. рис.).

Тогда ABE — правильный треугольник, $NE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3}$, $MN = \frac{2}{3}NE = 2\sqrt{3}$, $ME = \sqrt{3}$, так как MN — диаметр вписанной в треугольник ABE окружности, радиус которой равен $\frac{1}{3}NE$.

Заметим, что перпендикулярными основанию пирамиды являются грани SBC и SAD, а линия их пересечения (прямая SE) — перпендикуляр к основанию и $SE = \sqrt{5}$.

Пусть MK — высота в треугольнике SMN, тогда MK — перпендикуляр к плоскости ABS ($KM \perp SN$ и $KM \perp AB$, так как AB — перпендикуляр к плоскости SNE). Прямая CD параллельна плоскости SAB и поэтому расстояние от точки D до плоскости SAB равно MK.

Если $\angle SNM = \varphi$, то $KM = MN\sin\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{SE}{NE} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$, откуда $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$, $KM = 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{4}$.

2) Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник SCD, P — точка пересечения отрезка SN с перпендикуляром к стороне SM треугольника SMN, проведенным через точку O.

Радиус r этой окружности равен радиусу основания конуса, высота H конуса равна OP, а его объем $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

Если σ — площадь треугольника SCD, p — его полупериметр, то $\sigma = \frac{1}{2}CD\cdot SM$, $p = SD + \frac{CD}{2}$, где $CD = \frac{1}{3}AB = 2$, $SM = \sqrt{SE^2 + ME^2} = \sqrt{5+3} = 2\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SM^2 + MD^2} = \sqrt{8+1} = 3$, $p = 4$, $\sigma = 2\sqrt{2}$ и поэтому $r = \frac{\sigma}{p} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $SO = SM - r = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

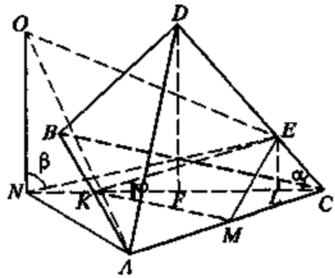
Пусть $\angle NSM = \alpha$, тогда $H = SO\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Найдем $\cos\alpha$, применив теорему косинусов к треугольнику SMN. Получим $MN^2 = SN^2 + SM^2 - 2SN\cdot SM\cos\alpha$, где $SN = \sqrt{SE^2 + NE^2} = \sqrt{5+27} = 4\sqrt{2}$, $SM = 2\sqrt{2}$, откуда $\cos\alpha = \frac{7}{8}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{15}}{7}$, $H = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{15}}{7} = \frac{3\sqrt{30}}{14}$.

5.90. $\frac{12\sqrt{111}}{37}$, $\frac{48\sqrt{15}}{65}$.

5.91. $\frac{\sqrt{30}}{4}$, $\frac{\pi\sqrt{30}}{28}$.

5.92. $\frac{12\sqrt{111}}{37}$, $\frac{48\sqrt{15}}{65}$.

5.93. $\arccos\frac{7}{2\sqrt{19}}$, $\frac{a\sqrt{6}}{9}$, $a\sqrt{\frac{11}{6}}$.



К задаче 5.93.

Решение. а) Пусть M — середина AC, $\angle DCF = \alpha$, φ — угол между прямыми BC и KE (см. рис.). Тогда

$$\angle EKM = \varphi,\ \cos\alpha = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из треугольников KEM, CEM и KEC по теореме косинусов получаем

$$EM^2 = KE^2 + KM^2 - 2KE\cdot KM\cdot\cos\varphi,$$

$$EM^2 = EC^2 + MC^2 - 2EC\cdot MC\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{4} - 2\,\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{36}\,a^2,$$

$$KE^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{3a^2}{4} - 2\,\frac{a}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{19a^2}{36},$$

откуда следует, что

$$\frac{7a^2}{36} = \frac{19a^2}{36} + \frac{a^2}{4} - 2\,\frac{a\sqrt{19}}{6}\cdot\frac{a}{2}\cos\varphi,\quad \cos\varphi = \frac{7}{2\sqrt{19}},\quad \sin\varphi = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

б) Расстояние ρ между прямыми BC и KE равно расстоянию h от точки C до плоскости KEM, так как прямая BC параллельна этой плоскости.

Вычислим двумя способами объем V пирамиды $KEMC$:

$$V = \frac{1}{3}\,\rho S_1 = \frac{1}{3}\,hS_2,$$

где S_1 и S_2 — площади треугольников KEM и KMC соответственно,

$$h = EL\ \ (L\in KC,\ EL\parallel DF),\quad h = \frac{1}{3}\,DF = \frac{1}{3}\,a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

Так как $S_1 = \frac{1}{2}\,KE\cdot KM\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{19}}{6}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$,

$$S_2 = \frac{1}{4}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16},\ \text{то}\ \rho = h = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

в) Пусть O — центр сферы, проходящей через точки A, B, E и F. Точка O лежит на перпендикуляре к плоскости ABF, проведенном через центр N окружности, описанной около треугольника ABF (рис.). Если R — радиус этой окружности, а x — радиус сферы, то

$$OB = OE = x, \quad R = NF = \frac{AB}{2\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = NA.$$

Пусть $ON = y$, $\angle ONE = \angle NEL = \beta$. Тогда из треугольника ONA по теореме Пифагора имеем

$$x^2 = y^2 + \frac{a^2}{3}, \tag{1}$$

а из треугольника ONE по теореме косинусов находим

$$x^2 = y^2 + NE^2 - 2y\cdot NE\cdot\cos\beta,$$

где

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{NL}{EL}, \quad NL = NF + FL = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{5a}{3\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \ NE = \frac{EL}{\cos\beta} = a.$$

Следовательно,

$$x^2 = y^2 + a^2 - 2ay\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим $y = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x = a\sqrt{\frac{11}{6}}$.

5.94. $\arccos\frac{5}{6}$, $\frac{a}{\sqrt{22}}$, $\frac{a}{8}\sqrt{\frac{451}{2}}$.

5.95. $\arccos\frac{5}{2\sqrt{19}}$, $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{51}}$, $\frac{a\sqrt{19}}{4\sqrt{2}}$.

5.96. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{a}{\sqrt{6}}$, $\frac{a}{8}\sqrt{\frac{209}{6}}$.

5.97. 1) $\frac{77}{36}$; 2) $\frac{40\sqrt{2}}{33}$; 3) $\arccos\frac{7}{11}$.

Решение. При пересечении пирамиды плоскостью α получается равнобедренная трапеция $ENMF$ (рис.), где $EN \| FM \| CD$.

а) Пусть P и Q — середины сторон FM и EN, σ — площадь сечения. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{2}(EN + FM)PQ,$$

где

$$EN = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}, \quad FM = \frac{5}{6}CD = \frac{5}{3}.$$

Если O — центр основания $ABCD$, L —точка пересечения SO и PQ, $\varphi = \angle QSL = \angle PSL$, K — середина CD, то

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{8+1} = 3, \quad SP = \frac{5}{6}SK = \frac{5}{2}, \quad SQ = \frac{1}{3}SK = 1,$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \ \cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \ \sin\varphi = \frac{1}{3}, \ \cos 2\varphi = \frac{7}{9}, \ \sin 2\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Из ΔSPQ по теореме косинусов находим

$$PQ^2 = 1 + \frac{25}{4} - 2\cdot 1\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{9} = \frac{121}{36},\ PQ = \frac{11}{6},$$

тогда

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right)\frac{11}{6} = \frac{77}{36}.$$

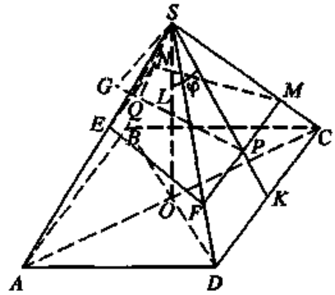
б) Искомый радиус r сферы равен расстоянию от точки A до плоскости α, а $r = 2x$, где x — расстояние от точки S до плоскости α.

Но x — высота в треугольнике SPQ, проведенная из вершины S.

Пусть σ_1 — площадь треугольника SPQ, тогда

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}SQ\cdot SP\sin 2\varphi = \frac{5\sqrt{2}}{9},$$

$$x = \frac{2\sigma_1}{PQ} = \frac{20\sqrt{2}}{33},\ r = 2x = \frac{40\sqrt{2}}{33}.$$



К задаче 5.97.

в) Угол β между плоскостью α и плоскостью $ABCD$ равен углу между SG и SL, так как $SG\perp\alpha$, $SL\perp ABCD$; $\cos\beta = \frac{x}{SL}$. Для вычисления SL воспользуемся формулой для биссектрисы в треугольнике SPQ.

Получим

$$SL = \frac{2SQ\cdot SP\cdot\cos\varphi}{SQ+SP} = \frac{40\sqrt{2}}{21},$$

откуда $\cos\beta = \frac{7}{11}$.

5.98. 1) $\frac{16\sqrt{3}}{81}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$; 3) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.99. 1) $\frac{77}{36}$; 2) $\frac{4\sqrt{2}}{33}$; 3) $\arccos\frac{7}{11}$.

5.100. 1) $\frac{16\sqrt{3}}{81}$; 2) $\frac{8\sqrt{6}}{9}$; $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

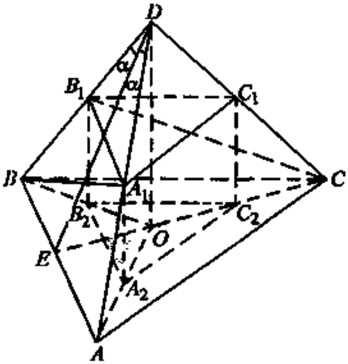
5.101. $\frac{84\sqrt{39}}{55}$, $\frac{1632\sqrt{3}}{275}$.

Решение. 1) Пусть E — середина AB, $\angle BDE = \angle ADE = \alpha$ (см. рис.), тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $AD = BD = \frac{BE}{\sin\alpha} = 10$.

По свойству биссектрисы $\frac{DA_1}{AA_1} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{6}$, откуда $\frac{DA_1}{DA} = \frac{5}{11}$.

Из подобия треугольников BCB_1 и DBE следует, что $\frac{BB_1}{BC} = \frac{BE}{BD}$ или $\frac{BB_1}{12} = \frac{6}{10}$, откуда $BB_1 = \frac{36}{5}$, $DB_1 = \frac{14}{5}$, $\frac{DB_1}{DB} = \frac{7}{25}$.

По условию $DC_1 = CC_1$ и поэтому $\frac{DC_1}{DC} = \frac{1}{2}$.



К задаче 5.101.

Найдем высоту DO пирамиды $ABCD$. Так как $BO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$, $BD = 10$, то $DO = \sqrt{BD^2 - BO^2} = 2\sqrt{13}$, а объем пирамиды $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{3} AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot DO = 24\sqrt{39}.$$

Пусть V_1 — объем пирамиды $A_1B_1C_1D_1$, $\frac{DA_1}{DA} = p$, $\frac{DB_1}{DB} = q$, $\frac{DC_1}{DC} = r$, тогда

$$V_1 = Vpqr = 24\sqrt{39} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{84\sqrt{39}}{55}.$$

2) Вычислим площадь S проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC. Пусть A_2, B_2, C_2 — проекции точек A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 лежат на соответствующих высотах треугольника ABC. По теореме Фалеса $\frac{OC_2}{OC} = \frac{DC_1}{DC} = r$, откуда $OC_2 = r \cdot 4\sqrt{3}$. Аналогично, $OA_1 = p \cdot 4\sqrt{3}$, $OB_1 = q \cdot 4\sqrt{3}$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} (OA_1 \cdot OB_1 + OB_1 \cdot OC_1 + OC_1 \cdot OA_1) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{3})^2 \left(\frac{5}{11} \cdot \frac{7}{25} + \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11}\right) = \frac{1632\sqrt{3}}{275}.$$

5.102. $\frac{3\sqrt{11}}{28}$, $\frac{20\sqrt{3}}{21}$.

5.103. $\frac{21\sqrt{39}}{880}$, $\frac{102\sqrt{3}}{275}$.

5.104. $\frac{6\sqrt{11}}{7}$, $\frac{80\sqrt{3}}{21}$.

5.105. $\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{7}{12}$, $\frac{C_1D}{CD} = \frac{21}{32}$; $\frac{49\sqrt{65}}{576}$; $\frac{13}{2\sqrt{10}}$.

Решение. Пусть $\angle KDA = \alpha$, $\angle KCD = \beta$, $\angle DKM = \gamma$, $\angle KMC = \varphi$ (см. рис.). Так как $\sin\alpha = \frac{1}{6}$, $AK = 1$, то $AD = BD = CD = 6$, $DM = 3$, $KD = \sqrt{36 - 1} = \sqrt{35}$. Если O — центр треугольника ABC, то $OC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{OC}{DC} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$.

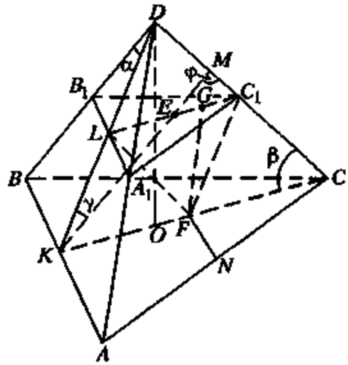
Применяя теорему косинусов в треугольниках KMC и KDM, получаем

1) $KM^2 = KC^2 + MC^2 - 2KC \cdot MC \cdot \cos\beta = 3 + 9 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = 10$, откуда $KM = \sqrt{10}$, $KE = \frac{3}{4} KM = \frac{3\sqrt{10}}{4}$, $ME = \frac{1}{4} KM = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

2) $\cos\varphi = \frac{KM^2+MC^2-KC^2}{2KM\cdot MC} = \frac{10+9-3}{6\sqrt{10}} = \frac{8}{3\sqrt{10}}$, откуда $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}-1} = \frac{\sqrt{26}}{8}$.

3) $\cos\gamma = \frac{KD^2+KM^2-DM^2}{2KD\cdot KM} = \frac{35+10-9}{2\sqrt{35}\cdot\sqrt{10}} = \frac{9}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}$, откуда $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{13}}{9\sqrt{2}}$.

Пусть A_1, B_1 — точки пересечения плоскости $\mathscr{P}$ с ребрами AD и BD. Так как $KM\perp AB$ ($BM = AM$) и $KM\perp A_1B_1$ (KM — перпендикуляр к плоскости $\mathscr{P}$), то $A_1B_1\| AB$. Если C_1 — точка пересечения плоскости $\mathscr{P}$ и прямой DC, то $A_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник ($A_1C_1 = B_1C_1$). Покажем, что точка C_1 лежит на ребре DC, а не на его продолжении за точку C_1, вычислив длину DC_1. Пусть L — середина A_1B_1, тогда $C_1L\perp KM$, так как KM — перпендикуляр к плоскости $\mathscr{P}$. Из прямоугольных треугольников LEK и MEC_1 находим



К задаче 5.105.

1) $LK = \frac{KE}{\cos\gamma} = \frac{3\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{9\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{35}}{12} = \frac{5}{12}KD$, откуда $DL = \frac{7}{12}KD$, $LE = KE\cdot\operatorname{tg}\gamma = \frac{3\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{\sqrt{13}}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{65}}{12}$;

2) $MC_1 = \frac{ME}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{8} = \frac{15}{16}$, откуда следует, что точка C_1 лежит на ребре CD, причем $DC_1 = 3+\frac{15}{16} = \frac{63}{16}$, $\frac{DC_1}{DC} = \frac{21}{32}$.

Таким образом, в сечении пирамиды плоскостью $\mathscr{P}$ получается равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$. Далее находим $EC_1 = ME\cdot\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{\sqrt{26}}{8} = \frac{\sqrt{65}}{16}$. Из подобия треугольников DLA_1 и DKA следует, что

$$\frac{A_1L}{AK} = \frac{DA_1}{DA} = \frac{DL}{DK} = \frac{7}{12},$$

откуда $A_1L = \frac{7}{12}$.

Пусть S — площадь треугольника $A_1B_1C_1$, тогда

$$S = A_1L\cdot LC_1 = A_1L(LE+EC_1) = \frac{7}{12}\left(\frac{\sqrt{65}}{12}+\frac{\sqrt{65}}{16}\right) = \frac{49\sqrt{65}}{576}.$$

Найдем, наконец, расстояние d от точки N до плоскости $\mathscr{P}$. Проведем через точку N прямую, параллельную AB и пересекающую KC в точке F (F — середина KC). Так как $NF\| AB$, а $AB\| A_1B_1$, то расстояние от точки F до плоскости $\mathscr{P}$ равно d.

Заметим, что высота FG, проведенная из точки F в треугольнике FLC_1, равна d ($FG \perp LC_1$ и $FG \perp A_1B_1$).

Для нахождения d достаточно найти площадь S_0 треугольника FLC_1. Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 — площади треугольников KDC, LKF, FCC_1 и DLC_1 соответственно. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2}DC\cdot KC\cdot\sin\beta = 3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{26},\ S_2 = \frac{5}{12}\cdot\frac{S_1}{2} = \frac{5}{24}S_1,$$

$$S_3 = \frac{11}{32}\cdot\frac{S_1}{2} = \frac{11}{64}S_1,\ S_4 = pqS_1,$$

где $p = \frac{DL}{DK} = \frac{7}{12}$, $q = \frac{DC_1}{DC} = \frac{21}{32}$, т. е. $S_4 = \frac{49}{128}S_1$. Следовательно, $S_0 = S_1\left(1 - \frac{5}{24} - \frac{11}{64} - \frac{49}{128}\right) = S_1\frac{13\cdot 7}{64\cdot 6}$,

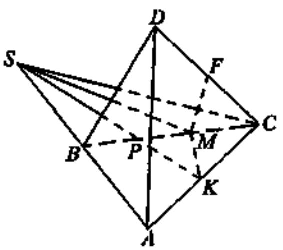
$$d = \frac{2S_0}{LC_1} = \frac{13}{2\sqrt{10}}.$$

5.106. $\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{5}{6}$, $\frac{C_1D}{CD} = \frac{5}{11}$; $\frac{25\sqrt{23}}{99}$; $\frac{7}{8}$.

5.107. $\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{17}{27}$, $\frac{C_1D}{CD} = \frac{17}{24}$; $\left(\frac{17}{27}\right)^2\sqrt{65}$; $\frac{34}{3\sqrt{10}}$.

5.108. $\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{13}{18}$, $\frac{C_1D}{CD} = \frac{13}{33}$; $\left(\frac{26}{9}\right)^2\frac{\sqrt{23}}{11}$; $\frac{25}{12}$.

5.109. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $BP = \frac{1}{3}BC$.



К задаче 5.109.

Решение. При решении задачи следует иметь в виду, что:

1) кратчайший путь между двумя точками — отрезок, соединяющий эти точки;

2) для нахождения кратчайшего пути муравей должен сначала ползти в плоскости ABC по прямой до некоторой точки M ребра BC (см. рис.), а затем — в плоскости BDC по прямой из точки M в точку F.

Задача сводится к нахождению такой точки P на ребре BC, чтобы для любой точки $M \in BC$ выполнялось неравенство

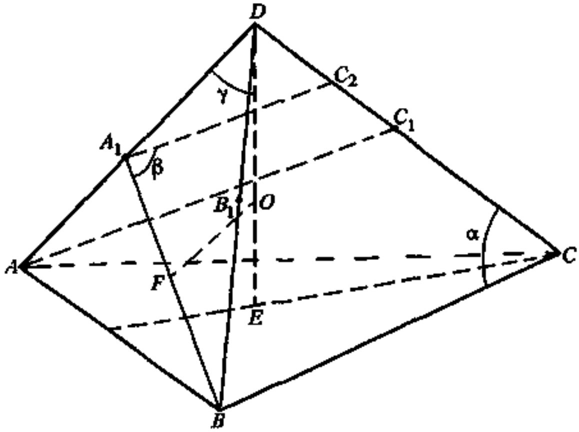
$$SM + MF \leqslant SP + PF.$$

Для нахождения точки P развернем грань BDC так, чтобы отрезок BC остался на месте, а вершина D совпала с точкой A. Так как $MF = MK$, где K — середина AC, то длина пути муравья равна $SM + MK$. Этот путь будет минимальным, если точки S, M и K лежат на одной прямой. Точка P, в которой пересекаются отрезки BC и SK, есть точка пересечения медиан треугольника ASC и поэтому $BP = \frac{1}{3}BC$.

5.110. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $PB = \frac{2}{5}BC$.

5.111. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $BP = \frac{BC}{4}$.

5.112. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $BP = \frac{BC}{9}$.



К задаче 5.113.

5.113. 1) $\arccos\frac{11}{32}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{301}}$; 3) 2.

Решение. 1) Пусть $\angle DAB = \angle DCB = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{37}{3}}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$. Если C_2 — середина отрезка DC_1, то $A_1C_2 \| AC_1$ и поэтому угол между прямыми BA_1 и AC_1 равен углу между прямыми BA_1 и A_1C_2.

Так как $DC = \frac{BC}{2\cos\alpha} = 4\sqrt{10}$, $CC_2 = \frac{3}{4}DC = 3\sqrt{10}$, то из ΔBCC_2 по теореме косинусов имеем

$$BC_2^2 = CC_2^2 + BC^2 - 2\cdot CC_2\cdot BC\cdot\cos\alpha = 102.$$

Пусть $\angle C_2A_1B = \beta$. Тогда из ΔA_1C_2B по теореме косинусов находим

$$BC_2^2 = A_1B^2 + A_1C_2^2 - 2A_1B\cdot A_1C_2\cos\beta,$$

где $A_1C_2 = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{1}{2}A_1B$.

Отрезок A_1B можно найти либо по теореме косинусов из ΔAA_1B, либо с помощью равенства $4A_1B^2 + AD^2 = 2(AB^2 + DB^2)$, где $AB^2 = 48$, $AD^2 = BD^2 = DC^2 = 160$. Следовательно, $A_1B^2 = 64$, $A_1B = 8$,

$A_1C_2 = 4$ и $102 = 64 + 16 - 2\cdot 8\cdot 4\cos\beta$, откуда $\cos\beta = -\frac{11}{32}$ и угол φ между прямыми BA_1 и AC_1 равен $\arccos\frac{11}{32}$.

2) Пусть x — расстояние между прямыми BA_1 и AC_1. Тогда $x = \frac{6V_1}{BA_1\cdot AC_1\cdot\sin\varphi}$, где V_1 — объем пирамиды ABA_1C_1. Но $V_1 = \frac{1}{4}V$, где V — объем пирамиды $ABCD$.

Если E — центр основания $ABCD$, то DE — высота пирамиды $ABCD$, причем $DE = \sqrt{DC^2 - EC^2}$, где $EC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 4$. Следовательно, $DE = \sqrt{160 - 16} = 12$, $\quad V = \frac{1}{3}(AB)^2\frac{\sqrt{3}}{4}DE = 48\sqrt{3}$, $\quad V_1 = 12\sqrt{3}$,

$x = \frac{12\cdot\sqrt{3}\cdot 6}{8\cdot 8\cdot\sin\varphi}$, где $\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{32}\right)^2} = \frac{\sqrt{903}}{12}$, $x = \frac{36}{\sqrt{301}}$.

3) Пусть O — центр сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1. Сфера касается основания пирамиды в точке E, а ее центр лежит на высоте DE пирамиды.

Если F — точка касания сферы с отрезком BA_1, то $OF\perp BA_1$ и $BF = BE$ (касательные, проведенные к сфере из одной точки равны). Так как $BF = BE = EC = 4$, а $BA_1 = 8$, то F — середина BA_1. Пусть r — радиус сферы, тогда $OE = OF = r$,

$$OA_1^2 = A_1F^2 + r^2 = 16 + r^2.$$

С другой стороны, по теореме косинусов из ΔDOA_1 имеем

$$OA_1^2 = DA_1^2 + DO^2 - 2DA_1\cdot DO\cdot\cos\gamma,$$

где $\gamma = \angle ADE$, $DA_1 = 2\sqrt{10}$, $DO = DE - r = 12 - r$.

Но $\operatorname{tg}\gamma = \frac{AE}{DE} = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Следовательно,

$$16 + r^2 = 40 + (12 - r^2) - 2\cdot 2\sqrt{10}\cdot(12 - r)\frac{3}{\sqrt{10}},$$

откуда $r = 2$.

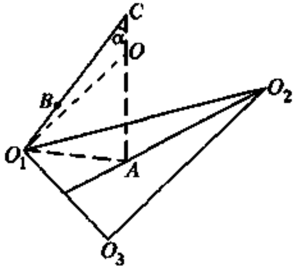
5.114. 1) $\arccos\frac{47}{121}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{259}}$; 3) $\frac{8}{3}$.

5.115. 1) $\arccos\frac{11}{32}$; 2) $\frac{72}{\sqrt{301}}$; 3) 4.

5.116. 1) $\arccos\frac{47}{121}$; 2) $\frac{72}{\sqrt{259}}$; 3) $\frac{16}{3}$.

5.117. $R \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)r$, $\frac{R\left(R + r - \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{r + \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}} - R}$.

Решение. Пусть Q_k — центр k-го шара радиуса r $(k=1,2,3)$, A — центр треугольника $O_1O_2O_3$, B — точка касания шара радиуса R с одним из трех одинаковых шаров r (например, с первым), C — центр шара радиуса R, O — центр шара, касающегося всех четырех шаров (см. рис.), x — его радиус. Тогда $O_1A=\frac{2r}{\sqrt{3}}$, $O_1C=r+R$, $OC=R+x$, $OO_1=r+x$. Точки C и O должны лежать на перпендикуляре к плоскости $O_1O_2O_3$, проведенном через точку A.



К задаче 5.117.

Чтобы шар радиуса R касался трех равных шаров радиуса r, должно выполняться условие $O_1C \geqslant O_1A$, т. е. $R+r \geqslant \frac{2r}{\sqrt{3}}$ или $R^2+2Rr-\frac{r^2}{3} \geqslant 0$.

Обозначим $\alpha=\angle O_1CA$, тогда $\sin\alpha=\frac{2r}{\sqrt{3}(R+r)}$, $\cos\alpha=$ $=\sqrt{1-\frac{4r^2}{3(R+r)^2}}=\frac{b}{R+r}$, где $b=\sqrt{R^2+2Rr-\frac{r^2}{3}}$.

Применяя теорему косинусов в треугольнике O_1CO, получаем

$$O_1O^2=CO_1^2+CO^2-2\cdot CO_1\cdot CO\cdot\cos\alpha, \text{ т. е.}$$

$$(r+x)^2=(R+r)^2+(R+x)^2-2(R+r)(R+x)\cdot\frac{b}{R+r},$$

откуда $x=\frac{R(R+r-b)}{r+b-R}$.

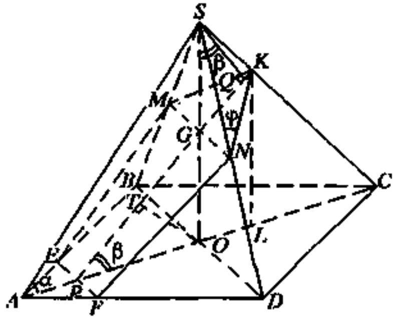
5.118. $R \geqslant r\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\dfrac{R\left(R-r-\sqrt{R^2-2Rr-\frac{r^2}{3}}\right)}{r-\sqrt{R^2-2Rr-\frac{r^2}{3}}+R}$.

5.119. $R \geqslant r\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$, $\dfrac{R\left(R+r+\sqrt{R^2+2Rr-\frac{r^2}{3}}\right)}{\sqrt{R^2+2Rr-\frac{r^2}{3}}+R-r}$.

5.120. $R \geqslant r\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\dfrac{R\left(R-r+\sqrt{R^2-2Rr-\frac{r^2}{3}}\right)}{r+R+\sqrt{R^2-2Rr-\frac{r^2}{3}}}$.

5.121. 1) $\frac{14}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\arcsin\frac{3}{5}$.

Решение. Пусть O — центр основания $ABCD$, Q и T — проекции точек S и O на плоскость EFK, L — проекция точки K на плоскость $ABCD$ (см. рис.). Так как $EF \parallel BD$, то плоскость EFK пересечет плоскость SBD по прямой MN ($M \in SB$, $N \in SD$), параллельной BD, а в сечении образуется пятиугольник $EMKNF$, составленный из равнобедренной трапеции $EMNF$ ($EM = NF$) и равнобедренного треугольника MKN ($MK = KN$). Пусть $AB = a$, $SO = h$, $\angle SAO = \alpha$, тогда $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $h = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha$, где $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Но



К задаче 5.121.

$h^2 + \frac{a^2}{4} = a$, $a^2 = 4$, $a = 2$, $h = \sqrt{3}$.

1) Пусть P — точка пересечения EF и AC, G — точка пересечения SO и PK (G — середина MN), тогда $OP = \frac{2}{3} AO = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, $OL = \frac{1}{3} OC = \frac{a\sqrt{2}}{6}$. Из подобия треугольников PGO и PKL следует, что $GO = \frac{2}{3} KL$, где $KL = \frac{2}{3} h$. Поэтому $GO = \frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Пусть $\angle OPG = \beta$, тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{GO}{OP} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin \beta = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $\cos \beta = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $PG = \frac{OP}{\cos \beta} = \frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$, $GK = \frac{1}{2} PG = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$. Кроме того, $MN = \frac{5}{9} BD = \frac{10\sqrt{2}}{9}$, $EF = \frac{1}{3} BD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, площадь сечения

$$\sigma = \frac{1}{2}(EF + MN)PG + \frac{1}{2} MN \cdot \frac{1}{2} PG = \frac{14}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

2) Пусть φ — угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью EFK, тогда $\sin \varphi = \frac{SQ}{SN}$, где $SQ = SG \cdot \cos \beta$ ($\angle GSQ = \angle OPG = \beta$), $SN = SG \frac{1}{\sin \alpha}$. Следовательно, $\sin \varphi = \cos \beta \sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\varphi = \arcsin \frac{3}{5}$.

3) Пусть d — расстояние от точки D до плоскости EFK. Так как прямая BD параллельна плоскости EFK, то $OT = d$, где $OT = OP \sin \beta = \frac{4}{3\sqrt{5}}$.

5.122. 1) $\frac{25}{27}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{15}$; 3) $\arcsin \frac{12}{5\sqrt{17}}$.

5.123. 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\arcsin \frac{12}{5\sqrt{10}}$.

5.124. 1) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$; 3) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$.

5.125. 1) $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{26}{99}$; 3) $\frac{22\sqrt{14}}{35\sqrt{15}}$.

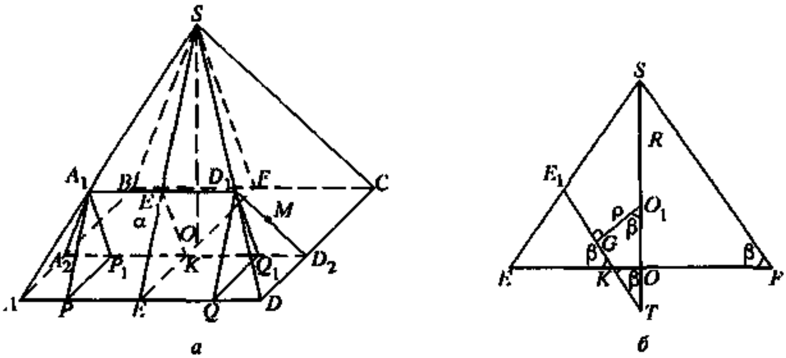
Решение. Плоскость α параллельна плоскости SBC ($SC \parallel \alpha$, $BC \parallel AD \parallel \alpha$), а в сечении пирамиды плоскостью α образуется трапеция $A_1D_1D_2A_2$ (см. рис. a) такая, что $D_1D_2 \parallel SC$, $A_1A_2 \parallel SB$, $A_1D_1 \parallel AD$, $A_1A_2 = D_1D_2$.

1) Пусть E, E_1 и K — середины сторон AD, A_1D_1 и A_2D_2 соответственно, M — точка касания вписанной в трапецию $A_1D_1D_2A_2$ окружности со стороной D_1D_2, r — радиус этой окружности.

Тогда $E_1D_1 = D_1M$, $MD_2 = D_2K$, $\frac{16}{5} = 2E_1D_1 + 2KD_2 = 2E_1D_1 + 2$, откуда $E_1D_1 = \frac{3}{5}$. Кроме того, $r = \sqrt{D_1M \cdot MD_2}$, т. е. $r = \frac{KE_1}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$, а из подобия треугольников SE_1D_1 и SED следует, что $\frac{SD_1}{SD} = \frac{E_1D_1}{ED} = \frac{3}{5}$, $\frac{DD_1}{SD} = \frac{2}{5}$. Тогда из подобия треугольников DD_1D_2 и DSC находим

$$\frac{DD_2}{DC} = \frac{DD_1}{DS} = \frac{2}{5},$$

откуда $DD_2 = \frac{4}{5}$, $\frac{DD_2}{DC} = \frac{2}{5}$.



К задаче 5.125.

2) Плоскость α отсекает от пирамиды клин с основанием AA_2D_2D. Проведем через точки A_1 и D_1 плоскости, параллельные AB и SE. Эти плоскости разбивают клин на две равные пирамиды с основаниями AA_2P_1P и DD_2Q_1Q (см. рис. *а*) и прямую призму с основаниями A_1PP_1 и D_1QQ_1.

Пусть h и v — высота и объем пирамиды $SABCD$, h_1 и v_1 — высота и объем пирамиды $A_1AA_2P_1P$, v_2 — объем призмы, v_3 — объем клина. Тогда $v = \frac{4}{3}h$, $v_1 = \frac{1}{3}AP \cdot PP_1h_1$, где $PQ = AD - 2AP = \frac{6}{5}$, т. е. $v_1 = \frac{16h}{3 \cdot 5^3}$; $v_2 = \frac{1}{2}PP_1 \cdot h_1 \cdot PQ$, где $AP = AE - A_1E_1 = \frac{2}{5}$, $PP_1 = DD_2 = \frac{4}{5}$, $\frac{h_1}{h} = \frac{DD_1}{SD} = \frac{2}{5}$, т. е. $v_2 = \frac{24}{5^3}h$. Тогда $v_3 = 2v_1 + v_2 = \frac{104}{3 \cdot 5}h$, а искомое отношение объемов $\frac{v_3}{v - v_3} = \frac{26}{99}$.

3) Пусть F — середина BC, O — середина EF, O_1 — центр описанной около пирамиды $SABCD$ сферы, R — радиус этой сферы, $\angle SFO = \beta$ (см. рис. *б*). Тогда $O_1 \in SO$, $SO_1 = R$, а расстояние ρ от точки O_1 до плоскости α равно O_1G, где $G \in E_1K$, $O_1G \perp E_1K$.

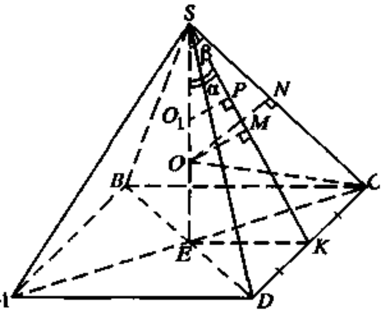
Пусть T — точка пересечения прямых SO и E_1K. Так как $E_1K \| SF$ (плоскость SEF пересекает параллельные плоскости SCB и α по параллельным прямым), то $\angle E_1KE = \angle SFO = \beta$. Кроме того, $\beta = \angle OKT = \angle GO_1T$ (углы с перпендикулярными сторонами).

Из подобия треугольников E_1EK и SEF находим $\frac{SF}{E_1K} = \frac{EF}{EK}$, где $E_1K = 2r = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$ (см. рис. *а*), $EF = 2$, $EK = DD_2 = \frac{4}{5}$. Следовательно, $SF = \sqrt{15}$, $SO = h = \sqrt{SF^2 - OF^2} = \sqrt{14}$, $\cos\beta = \frac{OF}{SF} = \frac{1}{\sqrt{15}}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OF} = \sqrt{14}$, $SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{14 + 2} = 4$.

Так как радиус сферы R равен радиусу окружности, описанной около треугольника SAC, то $R = \frac{SC^2 AC}{4s}$, где $s = \frac{1}{2} AC \cdot SO = 2\sqrt{7}$ — площадь треугольника SAC, откуда $SO_1 = R = \frac{4\sqrt{14}}{7}$.

Из ΔO_1GT находим $O_1G = \rho = O_1T\cos\beta$, где $O_1T = OO_1 + OT = h - R + KO \cdot \operatorname{tg}\beta$, $KO = OE - EK = \frac{1}{5}$.

Отсюда находим $\rho = \frac{22\sqrt{14}}{35\sqrt{15}}$.



К задаче 5.129.

5.126. 1) $\frac{5}{7}$ и $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{38}{305}$; 3) $\frac{107\sqrt{34}}{119\sqrt{35}}$.

5.127. 1) $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{26}{99}$; 3) $\frac{22\sqrt{14}}{35\sqrt{15}}$.

5.128. 1) $\frac{5}{7}$ и $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{38}{305}$; 3) $\frac{107\sqrt{34}}{119\sqrt{35}}$.

5.129. 1) $\frac{56}{3}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $\frac{8}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

Решение. Пусть $ABCD$ — основание пирамиды, S — ее вершина (см. рис.), K и E — середины соответственно DC и AC, O_1 — центр вписанного в пирамиду шара, r — его радиус, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на SK и SC, $P \in SK$ и $O_1P \perp SK$, $SE = h$. Тогда $OM = OE = r$, $OS = OC = 12$, $ON = 4\sqrt{2}$, $SN = NC$, $SN = \sqrt{OS^2 - ON^2} = \sqrt{144 - 32} = 4\sqrt{7}$, $SC = 8\sqrt{7}$. Обозначим $\angle ESK = \alpha$, $\angle ESC = \beta$. Тогда $\cos\beta = \frac{SN}{SO} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $h = SE =$

$= SC\cos\beta = \frac{56}{3}$, $EC = SC\sin\beta = \frac{8\sqrt{14}}{3}$, $EK = \frac{EC}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{EK}{SE} = \frac{1}{\sqrt{7}}$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Расстояние от точки O до боковой грани пирамиды равно OM, где $OM = SO\sin\alpha = 3\sqrt{2}$.

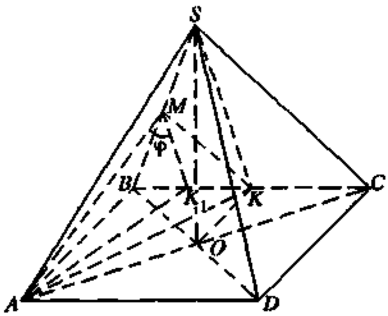
Из треугольника SO_1P находим $\frac{r}{h-r} = \sin\alpha$, откуда $r = \frac{h\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{8}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

5.130. 1) $\frac{28\sqrt{2}}{8}$; 2) 4; 3) $\frac{4}{3}(4-\sqrt{2})$.

5.131. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 3; 3) $\frac{4}{3}(\sqrt{5}-2)$.

5.132. 1) 2; 2) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 3) $4(\sqrt{5}-2)$.

5.133. 1) 8; 2) $\arccos\frac{3}{5}$; 3) $\frac{24}{13}$.



К задаче 5.133.

Решение. По условию $AB = a = 8$, $SO = h = 3$, $BM = MS$, $BK = KC$ (см. рис.).

1) Пусть v, v_1, v_2, v_3 — объемы пирамид $SABCD$, $SABK$, $ABKM$, $SAMK$. Тогда $v = \frac{1}{3}a^2h = 64$, $v_1 = \frac{1}{4}v$, $v_2 = \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{8}v$, $v_3 = v_2 = \frac{1}{8}v = 8$.

2) Пусть K_1 — середина BK, тогда $MK_1 \parallel SK$, $MK_1 \perp BK$ и $MK_1 = \frac{1}{2}SK$, где $SK = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 5$, $MK_1 = \frac{5}{2}$, $AK_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = 2\sqrt{17}$.

Если φ — угол между SK и AM, то $\angle AMK_1 = \varphi$. По теореме косинусов

$$AK_1^2 = AM^2 + MK_1^2 - 2AM\cdot MK_1\cos\varphi. \qquad (1)$$

Так как AM — медиана в треугольнике ABS, в котором $BS = SA = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + SK^2} = \sqrt{41}$, то $4AM^2 + BS^2 = 2AS^2 + 2AB^2$, откуда $AM = \frac{13}{2}$. Из равенства (1) находим

$$68 = \frac{169}{4} + \frac{25}{4} - 2\,\frac{13}{2}\,\frac{5}{2}\cos\varphi,$$

откуда $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$, а искомый угол между прямыми SK и AM (но лежит в пределах от 0 до $\pi/2$) равен $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$.

3) Расстояние ρ между AM и SK находим по формуле

$$\rho = \frac{6v_3}{AM\cdot SK\sin\alpha},$$

откуда $\rho = \frac{24}{13}$.

5.134. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\arccos\frac{23}{27}$; 3) $\frac{8}{5\sqrt{2}}$.

5.135. 1) 8; 2) $\arccos\frac{3}{5}$; 3) $\frac{24}{13}$.

5.136. 1) $\frac{4}{3}$, 2) $\arccos\frac{23}{27}$; 3) $\frac{8}{5\sqrt{2}}$.

5.137. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$, $R = \sqrt{\frac{337}{2}}$.

Решение. 1) Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения верхнего основания цилиндра с ребрами DA, DB и DC соответственно (см. рис.), O и K — центры нижнего и верхнего оснований цилиндра, тогда $OK = h$ — высота цилиндра. Так как треугольник $A_1B_1C_1$ вписан в окружность, а ее центр K лежит на A_1B_1, то A_1B_1 — диаметр этой окружности, K — его середина, $\angle B_1C_1A_1 = \frac{\pi}{2}$. Из подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC следует, что $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$, а коэффициент подобия $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{4}$.

Пусть $AC = b$, $BC = a$, S — площадь треугольника ABC. Тогда $S = \frac{1}{2}ab = rp = 3(24 + a + b)\frac{1}{2}$, откуда $\frac{ab}{3} = a + b + 24$. Но в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной в треугольник и описанной около него окружностей, т. е. $a + b = 24 + 6 = 30$, и поэтому $ab = 162$.

По условию объем пирамиды $v = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot H = 27\sqrt{2}$, откуда высота пирамиды $DM = H = \sqrt{2}$. Пусть $ON \perp AB$, $N \in AB$, φ — величина двугранного угла между гранями ABC и ABD. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{ON}{OK} = \frac{h}{3}$, где $\frac{h}{H} = \frac{AA_1}{AD} = \frac{3}{4}$, откуда $h = \frac{3}{4}H = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$.

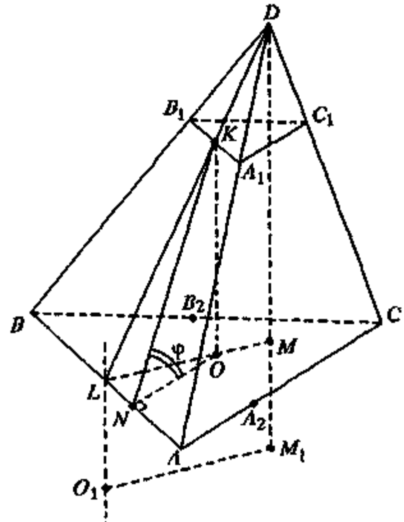
2) Так как $DM \parallel OK$, а K — середина A_1B_1, то плоскость, проведенная через DM и OK, пересечет ребро AB в его середине L. Центр O_1 сферы, описанной около пирамиды $ABCD$, лежит на прямой, проходящей через точку L и перпендикулярной плоскости ABC. Если

R — радиус сферы, то $R = O_1D = O_1C$. Пусть $LO_1 = x$, тогда $O_1C^2 = O_1L^2 + LC^2$, где $LC = \frac{AB}{2}$, откуда

$$R^2 = x^2 + 144. \tag{1}$$

Чтобы получить еще одно уравнение, связывающее R и x, проведем через точку O_1 прямую, параллельную LM и пересекающую DM в точке M_1. Тогда $MM_1 = x$, $O_1M_1 = LM$, $O_1D^2 = O_1M_1^2 + M_1D^2$, где $M_1D = H + x = \sqrt{2} + x$, т. е.

$$R^2 = LM^2 + (x + \sqrt{2})^2. \tag{2}$$



К задаче 5.138.

Отрезок LM выразим через LO, пользуясь тем, что

$\frac{LO}{LM} = \frac{h}{H} = \frac{3}{4}$, откуда $LM = \frac{4}{3}LO$.

Но LO — медиана в ΔAOB и по свойству сторон и диагоналей параллелограмма

$$(2LO)^2 + AB^2 = 2(OA^2 + OB^2). \tag{3}$$

Пусть A_2 и B_2 — точки касания вписанного в треугольник ABC круга, тогда $CA_2 = CB_2 = r = 3$, $BB_2 = a - r$, $AA_2 = b - r$, $OA^2 = (b-3)^2 + 9$, $OB^2 = (a-3)^2 + 9$ и равенство (3) примет вид

$$4LO^2 + 24^2 = 2(b^2 + a^2 + 36 - 6(a + b)) = 2(24^2 + 36 - 180),$$

откуда $4LO^2 = 288$, $LO = 6\sqrt{2}$, $LM = \frac{4}{3}LO = 8\sqrt{2}$.

Тогда уравнение (2) примет вид

$$R^2 = 128 + (x + \sqrt{2})^2. \tag{4}$$

Вычитая почленно из (4) уравнение (1), находим $2x\sqrt{2} - 14 = 0$, откуда $x = \frac{7}{\sqrt{2}}$. Подставляя найденное значение x в уравнение (1), получаем

$$R^2 = \frac{49}{2} + 144 = \frac{337}{2}, \text{ откуда } R = \sqrt{\frac{337}{2}}.$$

5.138. $V = \frac{110\sqrt{2}}{3}$, $R = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{129}{2}}$.

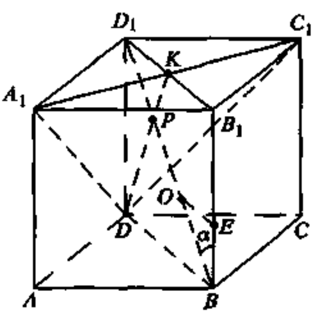
5.139. $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $R = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{33}{2}}$.

5.140. $V = 112\sqrt{\frac{2}{3}}$, $R = 11\sqrt{\frac{3}{2}}$.

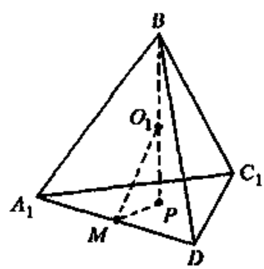
5.141. а) $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

Решение. а) Центр сферы, касающейся ребер BA, BB_1 и BC, лежит на диагонали BD_1 куба, образующей с каждым из ребер BA, BB_1, BC угол $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ (см. рис.). Если сфера касается плоскости A_1DC_1, то точка касания P есть центр равностороннего треугольника A_1DC_1, а $PB \perp A_1DC_1$. Пусть O — центр этой сферы, r — ее радиус, E — точка касания сферы с ребром BB_1. По свойству касательной и секущей $BE^2 = BP(BP - 2r)$, где $BP = \frac{2}{3}BD_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, так как из подобия треугольников DPB и D_1PK (K — середина D_1B_1) следует, что $BP = 2PD_1$.

Кроме того, $BE = OE\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Тогда $\frac{r^2}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 2r\right)$ или $3r^2 + 8r\sqrt{3} - 8 = 0$, откуда $r = \frac{-4\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{3}$.



К задаче 5.141.



К задаче 5.141.

б) Пусть R — радиус сферы, касающейся ребер BA, BB_1 BC и прямой DA_1, O_1 — ее центр, тогда

$$BO_1 = \frac{R}{\sin\alpha} = R\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Рассмотрим треугольную пирамиду с основанием A_1DC_1 и вершиной B (см. рис.). Пусть M — середина A_1D. Тогда $O_1M \perp A_1D$, $O_1M = R$, $MP = \frac{A_1D}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Из ΔO_1MP по теореме Пифагора находим $R^2 = \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - R\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$ или $R^2 - 4\sqrt{2}R + 3 = 0$, откуда $R = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

5.142. а) $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

5.143. а) $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

5.144. а) $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

5.145. 1) $\frac{329}{30}$; 2) $\arccos\frac{5}{7}$; 3) $\frac{8\sqrt{6}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{6}}{7}$.

Решение.

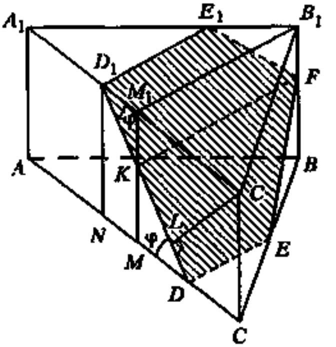
1) Пусть M и M_1 — середины AC и A_1C_1 (см. рис.), K — точка пересечения MM_1 и DD_1, $F \in BB_1$ и $KF \| BM$, $E_1 \in A_1B_1$ и $D_1E_1 \| DE$. Тогда сечение призмы плоскостью П — пятиугольник DD_1E_1FE, такой, что

$$DE = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5^2-3^2} = 2,$$

$$D_1E_1 = \frac{2}{3}B_1M_1 = \frac{2}{3}BM = \frac{8}{3},\ KF = BM = 4.$$

Этот пятиугольник составлен из двух трапеций, в которых KD_1 и KD — высоты, так как KF — перпендикуляр к плоскости AA_1CC_1. Из подобия треугольников KD_1M_1 и KDM следует, что $\frac{KD_1}{KD} = \frac{D_1M_1}{DM} = \frac{2}{3}$, и поэтому $KD_1 = \frac{2}{5}DD_1$, $KD = \frac{3}{5}DD_1$. Пусть $N \in AC$ и $D_1N \perp AC$. По теореме Пифагора $DD_1 = \sqrt{ND_1^2 + ND^2}$, где $ND = \frac{1}{3}AM + \frac{1}{2}MC = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Поэтому $DD_1 = \sqrt{6 + \frac{25}{4}} = \frac{7}{2}$, $KD_1 = \frac{7}{5}$, $KD = \frac{21}{10}$.



К задаче 5.145.

Площадь сечения

$$S = \frac{D_1E_1 + KF}{2}\cdot KD_1 + \frac{DE+KF}{2}KD = \frac{\frac{8}{3}+4}{2}\cdot\frac{7}{5} + \frac{2+4}{2}\cdot\frac{21}{10} = \frac{329}{30}.$$

2) Пусть φ — величина двугранного угла между плоскостями П и ABC. Так как $D_1D \subset$ П, $D_1D \perp DE$, $AD \in ABC$, $AD \perp DE$, а DE — линия пересечения плоскостей П и ABC (ребро двугранного угла), то $\angle ADD_1 = \varphi$ (см. рис.). Из ΔD_1ND находим $\cos\varphi = \frac{ND}{DD_1} = \frac{5}{7}$, $\varphi = \arccos\frac{5}{7}$.

3) Пусть ρ_1 и ρ — расстояния от точек C_1 и C до плоскости П. Так как $DE \perp AA_1C_1C$ и $DE \subset$ П, то плоскости П и AA_1C_1C перпендикулярны. Поэтому перпендикуляры, опущенные из точек C_1 и C на плоскость П, лежат в плоскости AA_1C_1C. Пусть L — основание перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на DD_1 (см. рис.). Тогда $\rho_1 = C_1L = C_1D_1 \sin\varphi = 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{8\sqrt{6}}{7}$. Так как $\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{DC}{D_1C_1} = \frac{3}{8}$, то $\rho = \frac{3}{8}\rho_1 = \frac{3\sqrt{6}}{7}$.

Замечание. При нахождении площади сечения можно воспользоваться формулой $S = \frac{S_1}{\cos\varphi}$, где S_1 — площадь проекции сечения на плоскость ABC. Здесь $S_1 = \frac{47}{6}$.

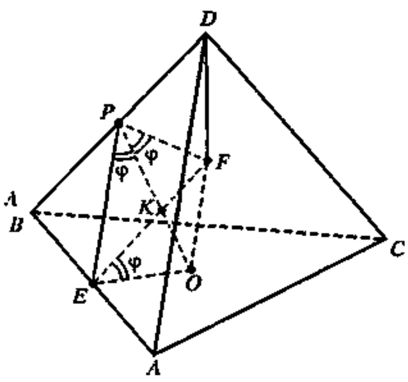
5.146. 1) $\frac{329}{30}$; 2) $\arccos\frac{5}{7}$; 3) $\frac{8\sqrt{6}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{6}}{7}$.

5.147. 1) $\frac{329}{30}$; 2) $\arccos\frac{5}{7}$; 3) $\frac{8\sqrt{6}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{6}}{7}$.

5.148. 1) $\frac{329}{30}$; 2) $\arccos\frac{5}{7}$; 3) $\frac{8\sqrt{6}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{6}}{7}$.

5.149. $\arcsin\frac{24}{25}$; 25; $\frac{320}{3}$.

Решение. а) Пусть O — центр сферы. Проведем через точки O, E и F плоскость Q. Пусть P — точка пересечения плоскости Q с ребром BD (см. рис.).



К задаче 5.149.

Плоскость Q перпендикулярна граням ABD и BCD (OE и OF — перпендикуляры к этим плоскостям), поэтому плоскость Q перпендикулярна линии их пересечения BD, а $\angle EPF = 2\varphi$ — величина двугранного угла между плоскостями ABD и BCD. Треугольники OEP и OFP являются прямоугольными ($OF \perp PF$, $OE \perp PE$), имеют равные катеты ($OF = OE = 5$) и общую гипотенузу OP. Следовательно, $\Delta OEP = \Delta OFP$ и $PF = PE$. Пусть K — точка пересечения EF и PO, тогда $EK = FK = \frac{EF}{2} = 4$ и $PK \perp EF$. Так как $\angle KEO = OPE = \varphi$, то $\cos\varphi = \frac{EK}{OE} = \frac{4}{5}$, $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin 2\varphi = \frac{24}{25}$. Искомый двугранный угол равен $\arcsin\frac{24}{25}$.

б) Пусть V — объем пирамиды $ABCD$. Докажем, что

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_1S_2\sin 2\varphi}{BD}, \tag{1}$$

где S_1 и S_2 — площади граней ABD и BCD.

Если H — высота пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины C на плоскость ABD, h — высота треугольника BCD, проведенная из вершины C, то

$$V=\frac{1}{3}S_1\cdot H,\ h=\frac{H}{\sin 2\varphi},\ S_2=\frac{1}{2}h\cdot BD=\frac{H\cdot BD}{2\sin 2\varphi},$$

$H=\frac{2S_2\sin 2\varphi}{BD}$, откуда следует формула (1).

Но $S_1=BD\cdot PE=\frac{5}{2}\cdot\frac{EK}{\sin\varphi}=\frac{50}{3}$, $S_2=3S_0$, где S_0 — площадь треугольника BFD, $S_0=\frac{1}{2}BD\cdot FP=\frac{5}{4}\cdot PE=\frac{5}{4}\cdot\frac{20}{3}=\frac{25}{3}$, $S_2=25$. Подставляя найденные значения S_1, S_2 и $\sin 2\varphi$ в формулу (1), получаем

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{50}{3}\cdot 25\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{2}{5}=\frac{320}{3}.$$

5.150. $\pi-\arcsin\frac{24}{25}$, 15, 36.

5.151. $\arcsin\frac{24}{25}$, 50, 400.

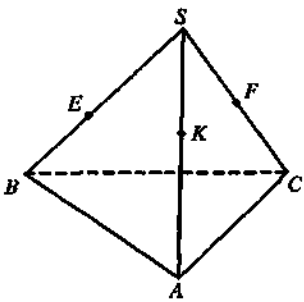
5.152. $\pi-\arcsin\frac{24}{25}$, 10, 32.

5.153. 7; 24; $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Решение. Пусть E, F — точки, в которых окружности, вписанные в соответствующие грани пирамиды, касаются ребер SB и SC (см. рис.). Так как $SK=5$, то $SE=SF=5$ (по свойству касательных, проведенных из одной точки).

Обозначим $AK=a$, $BE=b$, $CF=c$. Тогда $SA=a+5$, $SB=b+5$, $SC=c+5$, $AC=a+c$, $AB=a+b$, $BC=b+c$. Если S — площадь треугольника, r — радиус вписанной в него окружности, p — полупериметр треугольника, то

$$r=\frac{S}{p}.$$



К задаче 5.152.

Используя эту формулу, а также формулу Герона для площади треугольника, получаем

$$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{5bc(5+b+c)}}{5+b+c}=\sqrt{\frac{5bc}{5+b+c}},\ \sqrt{5}=\sqrt{\frac{5ac}{5+a+c}},\ \sqrt{7}=\sqrt{\frac{5ab}{5+a+b}}.$$

Отсюда следует, что

$$5+b+c=\frac{5}{3}bc,\ 5+a+c=ac,\ 5+a+b=\frac{5}{7}ab.$$

Выразим из первых двух уравнений b и a через c и подставим полученные выражения в третье уравнение:

$$b=\frac{5+c}{\frac{5}{3}c-1},\quad a=\frac{5+c}{c-1},$$

$$5+\frac{15+3c}{5c-3}+\frac{5+c}{c-1}=\frac{15}{7}\,\frac{(5+c)^2}{(c-1)(5c-3)}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$9c^2-8c-20=0,$$

откуда $c=2$, и тогда $b=3$, $a=7$.

Полупериметр треугольника ABC равен $a+b+c=12$, а его площадь равна $\sqrt{(a+b+c)abc}=\sqrt{12\cdot7\cdot3\cdot2}=6\sqrt{14}$. Следовательно, радиус окружности, вписанной в треугольник ABC,

$$r=\frac{6\sqrt{14}}{12}=\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

5.154. 1; 32; $\frac{\sqrt{35}}{2}$.

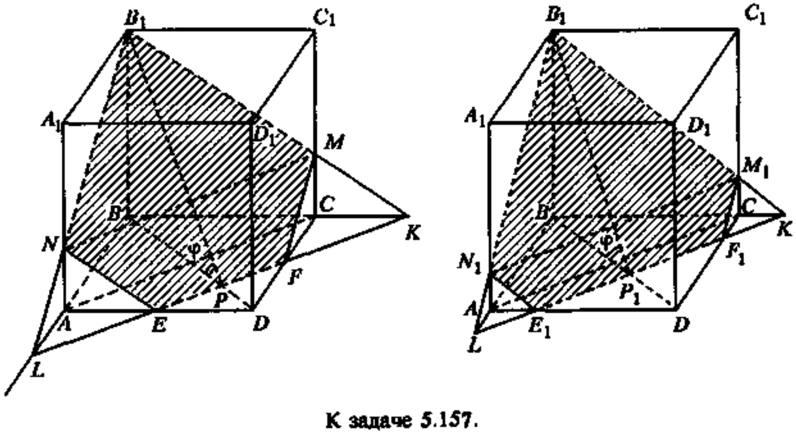
5.155. 11; 42; $\sqrt{\frac{88}{7}}$.

5.156. 11; 36; $\frac{\sqrt{22}}{3}$.

5.157. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

Решение. Пусть E и F — середины ребер AD и DC (см. рис. a).

а) Так как секущая плоскость α параллельна A_1C_1 и проходит через точку E, то она содержит прямую l, проведенную через точки



К задаче 5.157.

E и F. Если L и K — точки пересечения прямой l с прямыми BA и BC, то плоскость α содержит прямые B_1L и B_1K, пересекающие ребра A_1A и C_1C в точках N и M.

Отсюда следует, что в сечении куба плоскостью α образуется пятиугольник ENB_1MF. Пусть P — точка пересечения EF и BD, тогда $BP = \frac{3}{4}BD = \frac{3}{4}\sqrt{2}$, $\angle B_1PB = \varphi$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью ABC, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BB_1}{BP} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$.

Если S — площадь сечения, S_1 — площадь проекции этого сечения на плоскость ABC, то $S = \frac{S_1}{\cos\varphi}$, где $S_1 = \frac{7}{8}$, так как проекция сечения — пятиугольник $EABCF$. Следовательно, $S = \frac{7}{8}\cdot\frac{\sqrt{17}}{3} = \frac{3\sqrt{17}}{24}$.

б) Из всех сечений, проходящих через точку B_1, параллельных прямой A_1C_1 и пересекающих ребра AB и BC, наибольшую проекцию сечения на плоскость A_1C_1A имеет сечение, проведенное через AC (см. рис. *б*), а соответствующее наибольшее значение площади сечения равно площади треугольника B_1AC, т. е. равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пусть плоскость сечения β пересекает ребро AD в точке E_1 (см. рис. *б*) и ребро CD в точке F_1, тогда $E_1F_1 \parallel AC$.

Если P_1 — точка пересечения BD и E_1F_1 и $AE_1 = x$, то $CF_1 = x$, $DP_1 = \frac{1-x}{\sqrt{2}}$, $BP_1 = BD - DP_1 = \sqrt{2} - \frac{1-x}{\sqrt{2}} = \frac{1+x}{\sqrt{2}}$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть $\sigma = \sigma(x)$ — площадь сечения, $\sigma_1 = \sigma_1(x)$ — площадь проекции этого сечения на плоскость ABC.

Тогда

$$\sigma_1 = 1 - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{1+2x-x^2}{2},\ \ \sigma = \sigma_1\frac{1}{\cos\varphi},$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{BP_1} = \frac{\sqrt{2}}{1+x}$. Если $S = S(x)$ — площадь проекции сечения на плоскость $A_1C_1A_1$, то

$$S = \sigma\sin\varphi = \sigma_1\operatorname{tg}\varphi = \frac{1+2x-x^2}{\sqrt{2}(1+x)}.$$

Задача сводится к нахождению значения $x_0 \in [0, 1]$, при котором функция $S(x)$ принимает наибольшее значение. Найдем корни уравнения $S'(x) = 0$, где

$$S'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{(2-2x)(1+x)-(1+2-x^2)}{(1+x)^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}.$$

Уравнение $S'(x) = 0$, т. е. уравнение $x^2 + 2x - 1 = 0$ имеет на отрезке $[0, 1]$ единственный корень $x_0 = \sqrt{2} - 1$, причем $S'(x) > 0$ при $x \in [0, x_0)$ и $S'(x) < 0$ при $x \in (x_0, 1]$.

Следовательно, $S(x)$ принимает при $x = x_0$ наибольшее значение $S_{\max}$. Так как $x_0^2 = 1 - 2x_0$, то

$$S_{\max} = S(x_0) = \frac{1 + 2x_0 - 1 + 2x_0}{\sqrt{2}(1 + x_0)} = 2x_0 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Искомая площадь сечения $\sigma(x_0)$ равна $\frac{S(x_0)}{\sin \varphi_0}$, где $\operatorname{tg} \varphi(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{1 + x_0} = 1$, $\varphi(x_0) = \frac{\pi}{4}$, $\sin\varphi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\sigma(x_0) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 4 - 2\sqrt{2}$. Заметим, что $\sigma(x_0) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.158. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; $4 - 2\sqrt{2}$.

5.159. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; $4 - 2\sqrt{2}$.

5.160. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; $4 - 2\sqrt{2}$.

6. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

6.1. $a < -\frac{1}{2}$, $a > \frac{1}{2}$.

Решение. Область определения уравнения задается условиями

$$x > 0, \quad x \neq \frac{1}{25}. \tag{1}$$

Преобразуем уравнение, переходя к логарифмам по основанию 5:

$$\log_5 x + \frac{4(1-a^2)}{2+\log_5 x} - 2 = 0, \text{ откуда } \log_5 x = \pm 2a,$$

$$x_1 = 5^{2a}, \quad x_2 = 5^{-2a}.$$

Из (1) следует, что уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$.

Выясним, при каких значениях параметра a выполняется неравенство

$$\left|5^{2a} - 5^{-2a}\right| > \frac{24}{5}. \tag{2}$$

Если $a \geqslant 0$, то $5^{2a} \geqslant 5^{-2a}$ и неравенство (2) равносильно каждому из следующих неравенств

$$5^{2a} - 5^{-2a} > \frac{24}{5}, \ (5^{2a})^2 - \frac{24}{5}5^{2a} - 1 > 0,$$

$$(5^{2a} - 5)(5^{2a} + \tfrac{1}{5}) > 0, \ 5^{2a} > 5,$$

откуда $a > \frac{1}{2}$.

Если $a < 0$, то неравенство (2) равносильно каждому из следующих неравенств

$$5^{-2a} - 5^{2a} > \frac{24}{5}, \quad (5^{2a})^2 + \frac{24}{5}\cdot 5^{2a} - 1 < 0,$$

$$(5^{2a} + 5)(5^{2a} - \tfrac{1}{5}) < 0, \quad 5^{2a} - \frac{1}{5} < 0,$$

откуда $a < -\frac{1}{2}$.

6.2. $a \in \left\{\left(\frac{5}{6}; 1\right) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)\right\}$.

Корни уравнения: $x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = \frac{1}{a^2}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

6.3. $a \in \{(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)\}$.

Корни уравнения: $x_1 = 3^{1+a}$; $x_2 = 3^{1-a}$, $(a \neq \pm 2)$.

6.4. $a \in \left\{\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 2)\right\}$.

6.5. $\alpha = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

Решение. Вершиной параболы является точка $(x_0; y_0)$, где $x_0 = \sqrt{5}\cos\alpha - \frac{3}{2}$, $y_0 = -\left(5\cos^2\alpha - 3\sqrt{5}\cos\alpha + \frac{9}{4}\right) - \frac{25}{4}\cos 4\alpha$. По условию задачи $y_0 = 3x_0$, поэтому $\frac{25}{4}\cos 4\alpha + 5\cos^2\alpha - \frac{9}{4} = 0$, или $50\cos^2 2\alpha + 10\cos 2\alpha - 24 = 0$, откуда $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$.

По условию $y(0) = -\frac{25}{4}\cos 4\alpha < 0$, то есть $\cos 4\alpha > 0$ или $\cos^2 2\alpha > \frac{1}{2}$. Этому неравенству удовлетворяют лишь значения α, для которых $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

6.6. $\alpha = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$; $16\operatorname{ctg}^2\alpha - 5\cos\alpha - 7 = 0$, $(\operatorname{tg}^2\alpha)_1 = -2$, $(\operatorname{tg}^2\alpha)_2 = 4$.

6.7. $\alpha = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi n$, $n \in Z$; $\sin^2\alpha - \cos 4\alpha - \frac{3}{4} = 0$; $(\cos 2\alpha)_1 = \frac{1}{2}$, $(\cos 2\alpha)_2 = -\frac{3}{4}$.

6.8. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $27\operatorname{tg}^2\alpha + 10\cos 2\alpha - 11 = 0$, $(\operatorname{tg}^2\alpha)_1 = -\frac{1}{3}$, $(\operatorname{tg}^2\alpha)_2 = \frac{1}{9}$.

6.9. 27, $a = \frac{1}{2}$, $\{x + 2y = 3\}$. Локальный максимум — 3, $a = 0$, $\left\{x = \frac{2a+3}{2a+1},\ y = \frac{1}{2a+1}\right\}$.

6.10. 2, $a = 1$. $\{y - x = 2\}$. Локальный минимум — $\frac{25}{2}$, $a = 5$, $\left\{x = \frac{3a}{a+1},\ y = \frac{2a+5}{a+1}\right\}$.

6.11. 2, $a = 3$, $\{x + 3y = 2\}$. Локальный максимум — $\frac{1}{2}$, $a = 5$, $\left\{x = \frac{a+6}{a+3},\ y = \frac{1}{a+3}\right\}$.

6.12. 6, $a = -1$, $\{y = x + 3\}$. Локальный минимум — $\frac{32}{3}$, $a = 4$, $\left\{x = \frac{a}{a-1},\ y = \frac{3a-4}{a-1}\right\}$.

6.13. $f_{\max} = \frac{7}{40}\ \left(p = -\frac{1}{2}\right)$; $f_{\min} = \frac{1}{7}\ (p = 1)$.

Решение. Данная система имеет вид

$$\begin{cases} (3x + y)(x - 3y) = \dfrac{10-p}{4p^2+9}\cdot p, \\ (x - 2y)(x - 3y) = \dfrac{10-p}{4p^2+9}. \end{cases} \qquad (1)$$

Разделив первое уравнение на второе (это можно сделать, так как $x \leqslant 0$, $y > 0$, следовательно $x - 2y < 0$ и $x - 3y < 0$), получим $(3x + y):(x - 2y) = p$. Отсюда

$$\frac{x}{y} = \frac{2p+1}{p-3}, \tag{2}$$

где $-\frac{1}{2} \leqslant p < 3$, так как $\frac{x}{y} \leqslant 0$. Подставив соотношение (2) в уравнение (1), получаем $x^2 = \frac{(2p+1)^2}{7(4p^2+9)}$, $y^2 = \frac{(p-3)^2}{7(4p^2+9)}$, откуда $x^2 + y^2 = f(p) = \frac{5p^2 - 2p + 10}{7(4p^2+9)}$. Исследовав функцию $f(p)$ на максимум и минимум при $p \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right)$, получаем, что $f_{\max} = \frac{7}{40}$ $(p = -\frac{1}{2})$; $f_{\min} = \frac{1}{7}$ $(p = 1)$.

6.14. $f_{\min} = \frac{1}{3}$, $p = 1$; $f_{\max} = \frac{5}{3}$, $p = -1$ $\left(x = \frac{p+1}{2-p}\, y,\ x^2 = \frac{(p+1)^2}{3(p^2+4)},\ y^2 = \frac{(p-2)^2}{3(p^2+4)},\ f = \frac{2p^2-2p+5}{3(p^2+4)}\right)$.

6.15. $f_{\min} = \frac{3}{8}$, $p = -\frac{1}{2}$; $f_{\max} = \frac{3}{4}$, $p = \frac{1}{4}$ $\left(x = \frac{2p+1}{1-p}\, y,\ x^2 = \frac{(2p+1)^2}{3(4p^2+1)},\ y^2 = \frac{(1-p)^2}{3(4p^2+1)},\ f = \frac{5p^2+2p+2}{3(4p^2+1)}\right)$

6.16. $f_{\min} = \frac{1}{9}$, $p = 1$; $f_{\max} = \frac{1}{5}$, $p = -1$ $\left(x = \frac{p+1}{p-2}\, y,\ x^2 = \frac{(p+1)^2}{9(p^2+4)},\ y^2 = \frac{(p-2)^2}{9(p^2+4)},\ f = \frac{2p^2-2p+5}{9(p^2+4)}\right)$

6.17. $-\frac{5}{2} \leqslant p < 0$.

Решение. Из определения логарифма следует, что $x + 1 > 0$. Но второе неравенство приводится к виду $(x+1)\left(x - \frac{5}{2p}\right) > 0$, поэтому его можно заменить неравенством

$$x - \frac{5}{2p} > 0, \tag{1}$$

в силу того, что ищутся решения второго неравенства, являющиеся также решениями первого.

Первое неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < x + 1 < 1, \\ 0 < 3 - px < 1, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + 1 > 1, \\ 3 - px > 1, \end{cases}$$

при $p > 0$ принимающих вид

$$\begin{cases} -1 < x < 0, \\ \frac{2}{p} < x < \frac{3}{p}, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x > 0, \\ x < \frac{2}{p}, \end{cases} \tag{2,3}$$

а при $p < 0$

$$\begin{cases} -1 < x < 0, \\ \frac{3}{p} < x < \frac{2}{p}, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x > 0, \\ x > \frac{2}{p}. \end{cases} \qquad (4,5)$$

Система (2) несовместна, (3) имеет решение $0 < x < \frac{2}{p}$, не удовлетворяющее неравенству (1). Система (5) имеет решение $x > 0$, удовлетворяющее (1) при любом $p < 0$. Таким образом, искомыми являются те значения $p < 0$, при которых система (4) несовместна, либо каждое решение системы (4) удовлетворяет неравенству (1). Система (4) имеет решение: $\frac{3}{p} < x < \frac{2}{p}$ при $p \leqslant -3$, и промежуток $\frac{3}{p} < x \leqslant \frac{5}{2p}$ не удовлетворяет (1); $-1 < x < \frac{2}{p}$ при $-3 < p \leqslant -2$, — удовлетворяет (1), если $\frac{5}{2p} \leqslant -1$, т. е. $-\frac{5}{2} \leqslant p \leqslant -2$; не имеет решений, если $-2 < p < 0$. Объединяя найденные значения p, получаем ответ: $-\frac{5}{2} \leqslant p < 0$.

6.18. $-1 \leqslant p < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.19. $-\frac{3}{2} \leqslant p < 0$.

6.20. $\sqrt{2} < p \leqslant 2, \quad -\sqrt{2} < p < 0$.

6.21. $\alpha \in \left(-\pi + \arccos\frac{1}{4}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arccos\frac{1}{4}\right)$ $\left(-\frac{1}{4} < \cos\alpha < \frac{1}{2},\ \cos\alpha \neq 0\right)$.

6.22.
$\alpha \in \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos\frac{3}{4}\right) \cup \left(\arccos\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ $\left(-\frac{1}{2} < \cos\alpha < \frac{3}{4},\ \cos\alpha \neq 0\right)$.

Решение. Прямая l, задаваемая уравнением $y\cos\alpha + x\sin\alpha = \frac{1}{2}$, касается окружности, задаваемой уравнением $1 - 4x^2 - 4y^2 = 0$, поскольку система, задаваемая этими уравнениями, имеет единственное решение $x = \frac{\sin\alpha}{2}$, $y = \frac{\cos\alpha}{2}$. Таким образом условие задачи выполняется, если прямая l пересекает параболу, задаваемую уравнением $4x^2 + 15 - 12y = 0$, в двух точках, не совпадающих с точкой $A\left(\frac{\sin\alpha}{2}, \frac{\cos\alpha}{2}\right)$. Если $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, то прямая является вертикальной и пересекает параболу в одной точке. Если $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$, то прямая пересекает параболу в двух точках, если квадратное уравнение $\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{2\cos\alpha} - x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ имеет два различных решения.

Имеем: $D = \operatorname{tg}^2\alpha - \frac{4}{3}\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2\cos\alpha}\right) > 0$, $\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{2}{3}\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{8}{3} > 0$, $8\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 3 > 0$, $-\frac{1}{2} < \cos\alpha < \frac{3}{4}$, $\cos\alpha \neq 0$.

6.23. $\alpha \in \left(-\pi + \arccos\frac{1}{3}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arccos\frac{1}{3}\right)$ $\left(-\frac{1}{3} < \cos\alpha < \frac{1}{2},\ \cos\alpha \neq 0\right)$.

6.24. $\alpha \in \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos\frac{2}{3}\right) \cup \left(\arccos\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{2} < \cos\alpha < \frac{2}{3},\ \cos\alpha \neq 0\right)$.

6.25. $-\frac{7}{2} \leqslant p \leqslant \frac{3}{4}$.

6.26. $-\frac{10}{3} \leqslant p \leqslant 1$.

Указание. Условие выполняется, если точка графика, в которой касательная параллельна прямой AB, при проектировании на эту прямую попадает на отрезок $[AB]$.

6.27. $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant \frac{19}{4}$.

6.28. $-\frac{1}{3} \leqslant p \leqslant 4$.

6.29. $-\frac{7}{10} < p \leqslant 0$, $\frac{4}{3} \leqslant p < \frac{7}{5}$, $\frac{3}{2} \leqslant p < 2$.

Решение. Пусть $y_1 \leqslant y_2$ — корни квадратного уравнения $y^2 - 2By + C = 0$, где $B = 2p(p-1)$, $C = -p^3(2p-3)$. Для того чтобы данное биквадратное уравнение имело решения, необходимо, чтобы дискриминант $D = \ = 4(B^2 - C)$ был неотрицателен. Имеем: $\frac{D}{4} = p^2(2p-1)(3p-4) \geqslant 0$, т. е. $p \leqslant \frac{1}{2}$, $p \geqslant \frac{4}{3}$. Рассмотрим четыре случая. В первых трех $D > 0$.

а) $C < 0$, тогда $y_1 < 0 < y_2$, т. е. уравнение $(x - \frac{9}{4}p)^2 = y_1$ не имеет корней, а уравнение $(x - \frac{9}{4}p)^2 = y_2$ имеет два различных корня, сумма S которых, согласно теореме Виета, равна $\frac{9}{2}p$. Из неравенства $S < T$, где $T = -5p + 11p + 7$, следует $-\frac{7}{10} < p < 2$ и, с учетом условия $C < 0$, получаем $-\frac{7}{10} < p < 0$, $\frac{3}{2} < p < 2$.

б) $C = 0$, тогда $p = 0$ или $p = \frac{3}{2}$. При $p = 0$ уравнение имеет один корень $x = 0$ и неравенство $0 = S < T = 7$ выполнено, а при $p = \frac{3}{2}$ — три корня с суммой $S = \frac{81}{8}$, меньшей $T = \frac{49}{4}$.

в) $C > 0$, тогда y_1 и y_2 одного знака, причем $0 < y_1$, $y_2 > 0$, если $B > 0$. При этом уравнение имеет четыре корня с суммой $S = 9p$, поэтому из неравенства $S < T$ следует $-1 < p < \frac{7}{5}$, и, с учетом условий $C > 0$, $B > 0$, получаем $\frac{4}{3} < p < \frac{7}{5}$.

г) $D = 0$, тогда если $p = \frac{1}{2}$, то $y_1 = y_2 = -\frac{1}{2}$ и уравнение корней не имеет, а если $p = \frac{4}{3}$, то $y_1 = y_2 = \frac{8}{9}$, и $S = 6 < T$.

6.30. $0 \leqslant p \leqslant 1$, $\frac{7}{3} \leqslant p < \frac{5}{2}$, $3 \leqslant p < 5$.

6.31. $-5 < p < -4$, $-1 < p \leqslant 0$, $\frac{9}{4} \leqslant p < 5$.

6.32. $0 \leqslant p \leqslant 3$, $4 \leqslant p < \frac{9}{2}$, $5 \leqslant p < 6$.

6.33. $a \geqslant \frac{14}{3}$.

Указание. Исходное неравенство, равносильное неравенству $(4a-8)x^2 + (20-10a)x + 7a - 16 \geqslant 0$, при $a = 2$ не является верным, а при $a \neq 2$ справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $a > 2$ и $D = [10(2-a)]^2 - 16(a-2)(7a-16) \leqslant 0$.

6.34. $a \leqslant \frac{2}{3}$.

6.35. $a \geqslant \frac{10}{3}$.

6.36. $a \leqslant \frac{1}{3}$.

6.37. $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$.

Решение.

Уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни тогда и только тогда, когда $(4a-2)^2 \leqslant 1$, т. е. $\left|a - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{4}$, откуда $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{3}{4}$.

Задача сводится к нахождению всех значений a, при которых функция $f(a) = \frac{1-4a}{27a^4}$ принимает целые значения на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

Уравнение $f'(a) = \frac{1}{27}(-4a^{-5} + 12a^{-4}) = \frac{4}{27}a^{-5}(3a-1) = 0$ имеет на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ единственный корень $a = \frac{1}{3}$, причем $f'(a) < 0$ при $a < \frac{1}{3}$ и $f'(a) > 0$ при $a > \frac{1}{3}$. Следовательно, функция $f(a)$ убывает при $a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ и возрастает при $a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$.

Так как $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ и $f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$ — целые числа, а $-1 < f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{2^9}{3^7} < 0$, то искомое множество значений a состоит из чисел $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$.

6.38. $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$.

6.39. $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$.

6.40. $\frac{3}{2}$, 1.

6.41. $a < 0$, $a = 1$.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$1 + ax = 2\sqrt{x} \tag{1}$$

при условиях

$$x > 0, \ x \neq \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Полагая $\sqrt{x} = t$, запишем уравнение (1) в виде

$$at^2 - 2t + 1 = 0. \tag{3}$$

Если $a = 0$, то $t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$ и не выполняется второе из условий (2).

Пусть $a \neq 0$, тогда уравнение (3) является квадратным и имеет действительные корни тогда и только тогда, когда $D = 4 - 4a \geqslant 0$, т. е. при $a \leqslant 1$. Если $D = 0$ $(a = 1)$, то уравнение (3) имеет единственный положительный корень $t = 1$, а уравнение (1) имеет единственный корень $x = 1$, удовлетворяющий условиям (2).

Пусть $D > 0$ $(a < 1)$, тогда уравнение (3) имеет два действительных и различных корня. Так как $t = \sqrt{x} \geqslant 0$, то задача в случае $D > 0$ сводится к нахождению тех значений a, при которых уравнение (3) имеет один положительный корень (другой корень отрицателен), т. е. имеет действительные корни разных знаков. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $D > 0$, $\frac{1}{a} < 0$, т. е. при $a < 1$ и $a < 0$. Итак, в этом случае $a < 0$.

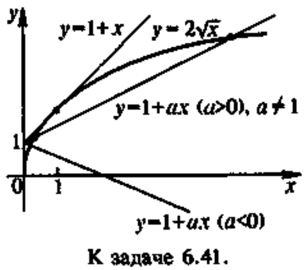
Приведем другое решение этой задачи, используя графики функций $y = 1 + ax$ и $y = 2\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$ (см. рис.).

Требуется найти все значения a, при которых эти графики имеют единственную общую точку и при этом выполняются условия (2).

Если $a < 0$, то прямая $y = 1 + ax$ пересекает параболу $y = 2\sqrt{x}$ в единственной точке.

Если $a = 0$, то из уравнения (1) получаем $x = \frac{1}{4}$ (не выполняются условия (2)).

Пусть $a > 0$, тогда прямая $y = 1 + ax$ имеет единственную общую точку с параболой только в том случае, когда она касается параболы. В этом случае уравнение (3) имеет единственный корень ($D = 0$, $a = 1$). При $0 < a < 1$ прямая $y = 1 + ax$ пересекает параболу $y = 2\sqrt{x}$ в двух точках, а при $a > 1$ прямая и парабола не имеют общих точек.



К задаче 6.41.

6.42. $a = -\frac{1}{2}$, $a > 0$.

6.43. $a < 0$, $a = \frac{9}{4}$.

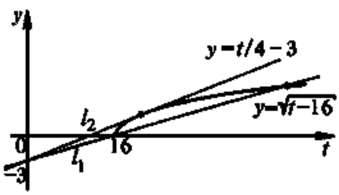
6.44. $a = -\frac{3}{4}$, $a > 1$.

6.45. $0 < a < \frac{3}{16}$, $a = \frac{1}{4}$.

Решение. Полагая $x + 7 = t$, получим уравнение

$$\sqrt{t - 16} = at - 3. \qquad (1)$$

Требуется найти все значения a, при которых графики функций $y = \sqrt{t - 16}$ и $y = at - 3$ имеют при $t \geqslant 16$ единственную общую точку (см. рис.).



К задаче 6.45.

Если $a \leqslant 0$, то прямая $y = at - 3$ не имеет общих точек с параболой $y = \sqrt{t - 16}$. Заметим, что угловой коэффициент прямой $y = at - 3$ равен a. Найдем угловые коэффициенты a_1 и a_2 прямых l_1 и l_2 (обе задаются уравнением вида $y = at - 3$), первая из которых проходит через точку $(16; 0)$, а вторая касается параболы $y = \sqrt{t - 16}$. Подставляя в уравнение $y = 3 - at$ значения $t = 16$, $y = 0$, находим $a_1 = \frac{3}{16}$.

Число a_2 является тем значением a, при котором уравнение (1) имеет единственный корень $t_1 > 16$. Возводя обе части (1) в квадрат, получаем уравнение $a^2t^2 - (6a + 1)t + 25 = 0$, дискриминант которого $D = (6a + 1)^2 - (10a)^2$. Уравнение $D = 0$ имеет единственный положительный корень $a = \frac{1}{4}$. Следовательно, $a_2 = \frac{1}{4}$. Если $\frac{3}{16} \leqslant a < \frac{1}{4}$, то прямая $y = at - 3$ и парабола $y = \sqrt{t - 16}$ имеют две общих точки, а при $a > \frac{1}{4}$ они не имеют общих точек.

6.46. $0 \leqslant a \leqslant \frac{3}{16}$, $a = -\frac{1}{16}$.

6.47. $a = \frac{1}{2}$, $0 < a < \frac{2}{5}$.

6.48. $0 \leqslant a \leqslant \frac{2}{5}$, $a = -\frac{1}{10}$.

6.49. $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < a \leqslant 2$.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_5 (x + \sqrt{2 - a}) = \log_5 (a - 1 - x) + \log_5 3, \qquad (1)$$

а уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x+\sqrt{2-a}=3(a-1-x), \\ a-1>x, \end{cases}$$

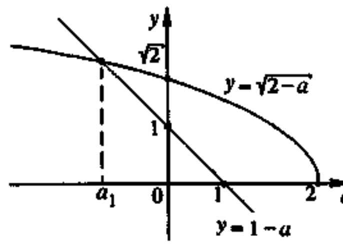
откуда следует неравенство

$$1-a<\sqrt{2-a}. \qquad (2)$$

Для решения неравенства (2) построим графики функций $y=1-a$ и $y=\sqrt{2-a}$ (см. рис.). Из рисунка видно, что множество решений неравенства (2) — промежуток $(a_1; 2]$, где a_1 — корень уравнения

$$1-a=\sqrt{2-a} \qquad (3)$$

такой, что $a_1<0$.



К задаче 6.49

Из (3) следует, что $(1-a)^2=2-a$ или $a^2-a-1=0$, откуда $a_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

6.50. $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<a\leqslant 5$.

6.51. $-\frac{3+\sqrt{17}}{2}<a\leqslant 3$.

6.52. $-5<a\leqslant 4$.

6.53. $-1<a<3$.

Решение. Первое уравнение исходной системы равносильно уравнению $8(3-x+y)=25-6x+7y$ или уравнению $y=2x+1$, если

$$y+3-x>0,$$

откуда следует, что $x>-4$. Тогда второе уравнение примет вид $2x+3=(x-2a)^2+a+2x$, или

$$x^2-4ax+4a^2+a-3=0, \qquad (1)$$

и задача сводится к нахождению тех значений a, при которых уравнение (1) имеет ровно два корня x_1 и x_2 такие, что $x_1>-4$ и $x_2>-4$.

Обозначим $f(x)=x^2-4ax+4a^2+a-3$, $D=16a^2-4(4a^2+a-3)=4(3-a)$ и воспользуемся тем, что указанные условия выполняются тогда и только тогда, когда $D>0$, $f(-4)>0$, $x_0>-4$, где $x_0=2a$ — абсцисса вершины параболы $y=f(x)$. Итак, $D=4(3-a)>0$, $f(-4)=4a^2+17a+13=4\left(a+\frac{13}{4}\right)(a+1)>0$, $2a>-4$, откуда $-1<a<3$.

6.54. $-5<a<2-3\sqrt{3}/2$.

6.55. $-5/2<a<-1/4$.

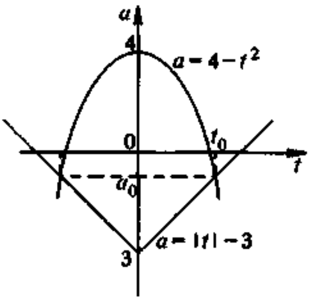
6.56. $1<a<5$.

6.57. 1) $a=-3$, $a=4$; 2) $a<-3$, $a>4$, $a=\frac{\sqrt{29}-7}{2}$.

Решение. Пусть $t=x+2$, тогда уравнение примет вид

$$(a+3-|t|)(a-4+t^2)=0. \qquad (1)$$

Построим графики функций $a=4-t^2$ и $a=|t|-3$ (см. рис.).



К задаче 6.57.

1) Прямые $a=4$ и $a=-3$ имеют ровно три общие точки с графиком уравнения (1), т. е. с совокупностью графиков $a=4-t^2$ и $a=|t|-3$. Это означает, что при $a=-3$ и $a=4$ уравнение (1) имеет равно три корня.

2) Если $a>4$ и $a<-3$, то уравнение (1) имеет ровно два корня. Два корня уравнение (1) имеет и в том случае, когда графики функций $a=4-t^2$ и $a=|t|-3$ имеют общие точки, т. е. если $4-t_0^2=|t_0|-3$, где $t_0>0$, или $4-z^2=z-3$ $(z=|t_0|)$. Отсюда $z=\frac{\sqrt{29}-1}{2}$, $a_0=z-3=\frac{\sqrt{29}-7}{2}$.

6.58. 1) $a=6$, $a=-1$; 2) $a<-1$, $a>6$, $a=\frac{13-\sqrt{29}}{2}$.

6.59. 1) $a=2$, $a=9$; 2) $a<2$, $a>9$, $a=\frac{3+\sqrt{29}}{2}$.

6.60. 1) $a=-4$, $a=3$; 2) $a<-4$, $a>3$, $a=\frac{7-\sqrt{29}}{2}$.

6.61. $\frac{9}{2}$, $\frac{117}{4}$.

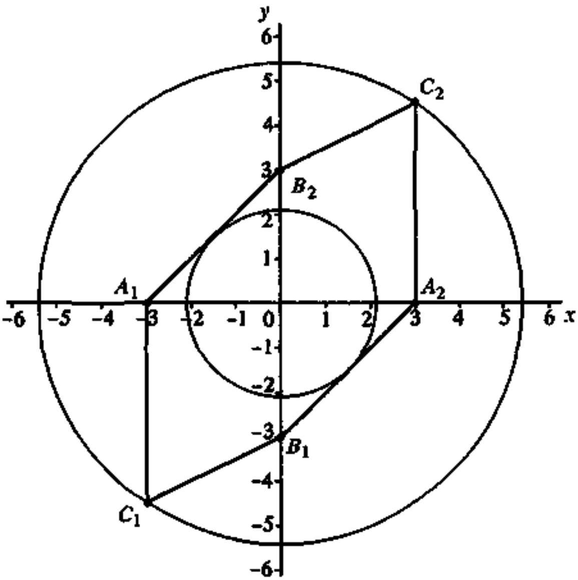
Решение. Графиком первого уравнения системы является замкнутая ломаная L (граница прямоугольника) с вершинами в точках, лежащих на прямых $x=0$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}x$.

Найдем эти вершины. Если $x=0$, то $|y|=3$ ($y=3$ и $y=-3$), если $y=0$, то $|x|=3$, если $y=\frac{3}{2}x$, то $|x|=3$, $|y|=\frac{9}{2}$.

Ломаная L изображена на рисунке, где $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;3)$, $C_1\left(-3;-\frac{9}{2}\right)$, $C_2\left(3;\frac{9}{2}\right)$. Графиком второго уравнения при $a>0$ является окружность с радиусом $\sqrt{a}$ с центром $O(0;0)$.

Данная система имеет ровно два решения в следующих случаях:

1) окружность касается отрезков A_1B_2 и A_2B, тогда $\sqrt{a}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $a=\frac{9}{2}$;



К задаче 6.61.

2) радиус окружности равен расстоянию от точки O до точек C_1 и C_2, тогда $a = 3^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{117}{4}$.

6.62. $2, \frac{2500}{121}$.

6.63. $\frac{81}{32}, \frac{81}{10}$.

6.64. $\frac{121}{13}, \frac{121}{50}$.

6.65. $\frac{17}{9} \leqslant a \leqslant 14$.

Решение. Если $a = 0$, то уравнение примет вид $3x + 14 = 0$, откуда $x_0 = -\frac{14}{3}$ и $x_0 \neq [0, 1]$.

Пусть $a \neq 0$, $f(x) = 4ax^2 + (4a-3)x + a - 14$, $D = (4a-3)^2 - 16a(a-14) = 200a + 9$.

Если $D = 0$, то $a = -\frac{9}{200}$, $x_0 = -\frac{4a-3}{8a} < 0$, $x_0 \neq [0, 1]$.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней, а если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня.

Интервалу $(0, 1)$ принадлежит только один из этих корней тогда и только тогда, когда числа $f(0)$ и $f(1)$ имеют разные знаки, т. е. при условии

$$f(0)f(1) < 0.$$

Заметим, что равенства $f(0) = a - 14 = 0$ и $f(1) = 9a - 17 = 0$ не могут выполняться одновременно, а если $f(0) = 0$ или $f(1) = 0$, то уравнение имеет единственный корень на отрезке $[0, 1]$ в том и только том случае, когда

$$f(0)f(1) \leqslant 0,$$

т. е. $(a - 14)(9a - 17) \leqslant 0$, откуда находим $\frac{17}{9} \leqslant a \leqslant 14$.

6.66. $-\frac{13}{12} < a \leqslant \frac{2}{3}$.

6.67. $\frac{16}{9} \leqslant a \leqslant 6$.

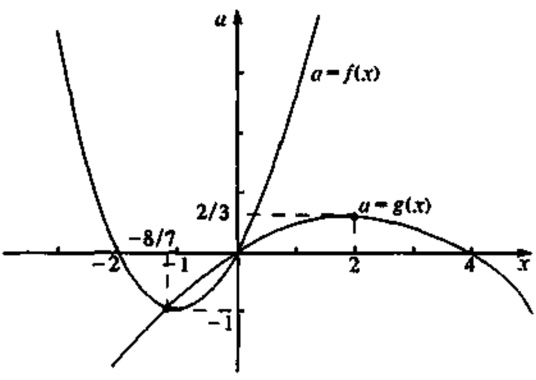
6.68. $-\frac{23}{4} < a \leqslant \frac{5}{4}$.

6.69. $a = -1$, $a = 0$.

Решение. Исходная система неравенств равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x \leqslant a, & (1) \\ \dfrac{4x - x^2}{6} \geqslant a. & (2) \end{cases}$$

Построим графики функций $a = x^2 + 2x = f(x)$ и $a = \frac{4x - x^2}{6} = g(x)$ (см. рис.).



К задаче 6.69.

Эти графики пересекаются в точках с абсциссами $-\frac{8}{7}$ и 0, $f(x) \geqslant -1$ и $g(x) \leqslant \frac{2}{3}$ при $x \in \mathbb{R}$.

При $a < -1$ неравенство (1) не имеет решений, а при $a > \frac{2}{3}$ неравенство (2) не имеет решений.

При каждом значении $a=a_0$, где $a_0 \geqslant -1$ множество E_1 решений неравенств (1) состоит из абсцисс тех точек графика функции $a=f(x)$, которые лежат ниже прямой $a=a_0$ и на этой прямой.

Аналогично, при каждом $a=a_0$, где $a_0 \leqslant \frac{2}{3}$, множество E_2 решений неравенства (2) состоит из абсцисс тех точек графика функции $a=g(x)$, которые лежат выше прямой $a=a_0$ и на этой прямой.

Если $a_0 \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$, то множества E_1 и E_2 — отрезки (при $a_0=\frac{2}{3}$ множество E_2 — точка $x=2$), не имеющие общих точек (E_1 и E_2 лежат по разные стороны от точки $x=0$). В этом случае система (1)—(2) несовместна (не имеет решений).

Если $a_0=0$, то множества E_1 и E_2 имеют единственную общую точку $x=0$, т. е. при $a=0$ системы (1)—(2) имеют единственное решение.

Если $-1<a_0<0$, то пересечение E множеств E_1 и E_2 — отрезок. В этом случае система имеет бесконечное множество решений (каждая точка $x \in E$ — решение системы (1)—(2)).

Наконец, при $a=-1$ система имеет единственное решение $x=-1$.

6.70. $a=0$, $a=\frac{1}{4}$.

6.71. $a=-\frac{1}{12}$, $a=0$.

6.72. $a=0$, $a=\frac{3}{2}$.

6.73. $a=\sqrt[4]{7}$, $0<a\leqslant 1$.

Решение. Если выполняются условия

$$a>0,\ 7^x>\log_7 a, \tag{1}$$

то исходное уравнение равносильно уравнению

$$7^x-\log_7 a=7^{2x}. \tag{2}$$

Пусть $t=7^x$, $\log_7 a=q$, тогда $t>0$, и задача сводится к нахождению таких значений a, при которых уравнение

$$t^2-t+q=0 \tag{3}$$

имеет единственный положительный корень $t_1>q$.

Дискриминант уравнения (3) $D=1-4q$; $D\geqslant 0$ при $q\leqslant\frac{1}{4}$, т. е. $\log_7 a\leqslant\frac{1}{4}$, откуда $0<a\leqslant\sqrt[4]{7}$. Если $D=0$, то $q=\frac{1}{4}$, $\log_7 a=\frac{1}{4}$, $t_1=\frac{1}{2}>q$.

Итак, при $a=\sqrt[4]{7}$ исходное уравнение имеет единственное решение.

Пусть $D > 0$, тогда уравнение (3) имеет единственный положительный корень в случае, когда $q \leqslant 0$, т. е. $\log_7 a \leqslant 0$, откуда $0 < a \leqslant 1$.

При $a = \sqrt[4]{7}$ и $0 < a \leqslant 1$ условия (1) выполняются.

6.74. $a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $a \geqslant 1$.

6.75. $a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $a \geqslant 1$.

6.76. $a = \sqrt[4]{2}$, $0 < a \leqslant 1$.

7. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

7.1. $x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in Z,\ k=11\ \left(a_1=-\frac{2}{5},\ d=\frac{1}{10}\right)$;
$x=\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2\pi n,\ \ n\in Z,\ k=15\ \left(a_1=\frac{4}{5},\ d=-\frac{1}{10}\right)$.

Решение. Воспользовавшись свойством последовательных членов арифметической прогрессии, получим

$$8\sin x\operatorname{ctg}2x=\cos x-\sin x,$$

откуда

$$4\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x-3=0,$$

$$\operatorname{tg}x=1,\ \ \operatorname{tg}x=-\frac{3}{4}.$$

В первом случае

$$\sin x=\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{ctg}2x\ =\ 0\ ,$$

и разность арифметической прогрессии $d=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Далее имеем:

$$a_7=\frac{1}{5}=a_1+6d=a_1\mp\frac{6}{\sqrt{2}},$$

$$a_1=\frac{1}{5}\pm\frac{6}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку $a_k=-\sin x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}=a_1+(k-1)d,$ то $\mp(k-1)\frac{1}{\sqrt{2}}=\mp\frac{7}{\sqrt{2}}-\frac{1}{5}$ и $\pm\sqrt{2}=(k-8)\cdot 5,\ k\in N$, что невозможно в силу иррациональности числа $\sqrt{2}$.

Во втором случае существуют две возможности:

1) $x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in Z$, тогда $\sin x=-\frac{3}{5},\ \operatorname{ctg}2x=-\frac{7}{24}$, $d=\frac{1}{10},\ a_1=-\frac{2}{5},\ a_k=-\frac{2}{5}+\frac{k-1}{10}=\frac{3}{5}$.

Отсюда $k=11$.

2) $x=\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2\pi n,\ \ n\in Z$, тогда $\sin x=\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}2x=-\frac{7}{24}$, $d=-\frac{1}{10},\ a_1=\frac{4}{5},\ a_k=\frac{4}{5}-\frac{k-1}{10}=-\frac{3}{5}$ и $k=15$.

7.2. $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,\ k=7,\ \left(a_1=\frac{2^{11/10}}{27\sqrt{5}},\ q=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$.

7.3. $x=-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi n,\ n\in Z,\ k=7;\ \left(a_1=\frac{38}{5},\ d=-\frac{2}{5}\right)$;
$x=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi n,\ n\in Z,\ k=7,\ \left(a_1=-\frac{18}{5},\ d=\frac{2}{5}\right)$.

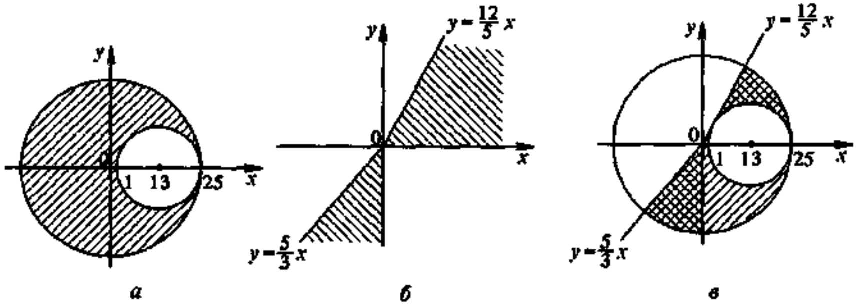
7.4. $x=-\operatorname{arctg}2+(2n+1)\pi,\ n\in Z,\ k=8,\ \left(a_1=\frac{16}{3\cdot 5^{2/7}};\ q=\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

7.5. $S=\frac{625}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{12}{5}+\operatorname{arctg}\frac{5}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\cdot 169$. Фигура M заштрихована (рис. *в*)

Решение. Второе неравенство системы равносильно неравенству

$$\frac{(x-13)^2+y^2-144}{x^2+y^2-625}<0.$$

Точки, координаты которых ему удовлетворяют, лежат внутри круга радиуса 25 с центром в точке $(0;\,0)$, но вне круга радиуса 12 с центром в точке $(13;\,0)$. Множество всех этих точек указано штриховкой на рис. *а*.



К задаче 7.5.

Неравенство

$$\sqrt{\frac{xy}{15}}\geqslant y-2x \qquad (1)$$

имеет смысл, если $xy\geqslant 0$, то есть для точек $(x;\,y)$, лежащих в первом или третьем квадрантах.

При $y<2x$ правая часть неравенства (1) отрицательна, поэтому все точки $(x;\,y)$ такие, что $xy\geqslant 0$, $y<2x$ являются его решениями.

Если $xy\geqslant 0$, $y\geqslant 2x$, то неравенство (1) равносильно каждому из следующих неравенств

$$\frac{xy}{15}\geqslant y^2-4xy+4x^2,$$

$$\left(y-\frac{12}{5}x\right)\left(y-\frac{5}{3}x\right)\leqslant 0,$$

откуда $2x\leqslant y\leqslant\frac{12}{5}x$ при $x\geqslant 0$ и $2x\leqslant y\leqslant\frac{5}{3}x$ при $x<0$.

Таким образом, неравенству (1) удовлетворяют точки, отмеченные штриховкой на рис. *б*.

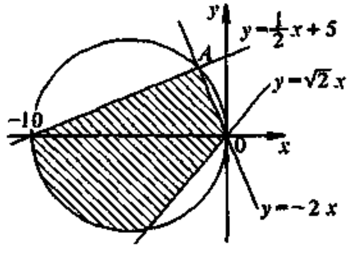
Заметим, что прямая $y=\frac{12}{5}x$ имеет единственную общую точку $A=\left(\frac{25}{13};\,\frac{60}{13}\right)$ с окружностью $(x-13)^2+y^2=144$.

Поэтому фигура M имеет вид, указанный штриховкой на рис. *в*.

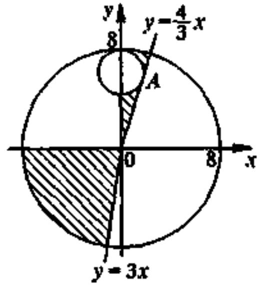
Площадь фигуры M равна сумме площадей двух секторов (соответствующие центральные углы равны $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$ и $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$) минус площадь полукруга радиуса 12.

7.6. $S = 25\operatorname{arctg}\sqrt{2} + 20 + \frac{25\sqrt{2}}{3} = \frac{25}{2}(\pi - \operatorname{arctg}2\sqrt{2}) + 20 + \frac{25\sqrt{2}}{3}$.

Фигура M заштрихована (см. рис.), $A(-2; 4)$, $B\left(-\frac{10}{3}; -\frac{10\sqrt{2}}{3}\right)$.



К задаче 7.6.



К задаче 7.7.

7.7. $S = 32(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}3) - \frac{9}{2}\pi$. Фигура M заштрихована (см. рис.), $A\left(\frac{12}{5}; \frac{16}{5}\right)$ — точка касания.

7.8. $S = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5}}{3} + 4 = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{3} + 4$. Фигура M заштрихована (см. рис.), $A(2; -2)$, $B\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3}; -\frac{10}{3}\right)$.

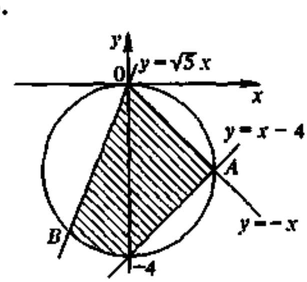
7.9. Фигура Φ — окружность $(a+13)^2 + b^2 = 169$ с исключенной точкой $(-1; 5)$. Прямые: $b = -\frac{60}{91}a + 7$, $a = 0$ — касательные, $b = 2a + 7$ — проходит через точку $(-1; 5)$.

Решение. Найдем x и y из первых двух уравнений системы. С этой целью вычтем из первого уравнения, умноженного на b, второе, умноженное на $(b-4)$:

$$4(a+b-4)x = 12 - b. \qquad (1)$$

Кроме того, вычтем из второго уравнения, умноженного на a, первое, умноженное на $(a-4)$:

$$4(a+b-4)y = a + 8. \qquad (2)$$



К задаче 7.8.

Рассмотрим случай $a + b \neq 4$. Тогда система, состоящая из первых двух уравнений исходной, имеет единственное решение

$$x = \frac{12-b}{4(a+b-4)}; \quad y = \frac{a+8}{4(a+b-4)}.$$

Подставляя выражения для x и y в третье уравнение, после преобразований получаем уравнение окружности $(a+13)^2+b^2=169$.

Условие $a+b\neq 4$ означает, что из этой окружности необходимо исключить точки $(-8;\ 12)$ и $(-1;\ 5)$.

В случае $a+b=4$ из соотношений (1) и (2) вытекает, что решение системы может существовать лишь для $a=-8$, $b=12$. При этих значениях a и b исходная система принимает вид

$$\begin{cases} -8x+8y=2, \\ -12x+12y=3, \\ 12x+2y=3 \end{cases}$$

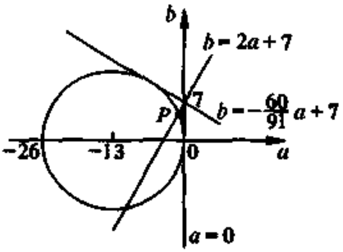
и имеет единственное решение.

Итак, фигура Φ является окружностью $(a+13)^2+b^2=169$ с исключенной точкой $(-1;\ 5)$ (см. рис.).

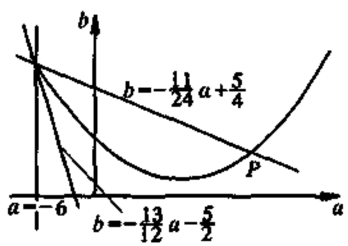
Легко видеть, что искомыми прямыми будут:

1) $b=-\frac{60}{91}a+7$, $a=0$ — касательные к окружности, проведенные из точки $(0;\ 7)$,

2) $b=2a+7$ — прямая, проходящая через точку $(0;\ 7)$ и исключенную точку $P\ (-1;\ 5)$.



К задаче 7.9.

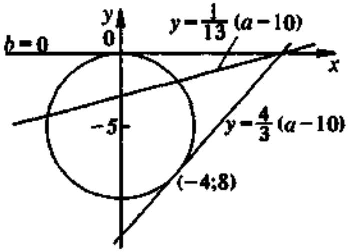


К задаче 7.10.

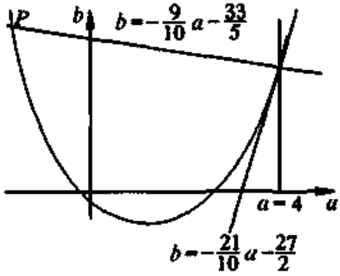
7.10. $\Phi=\left\{b=\frac{1}{12}(a^2-a+6)\right\}/\left\{\left(\frac{3}{2};\ \frac{9}{16}\right)\right\}$ — парабола с исключенной точкой $P=\left(\frac{3}{2};\ \frac{9}{16}\right)$ (см. рис.). Прямые: $a=-6$ — параллельная оси, $b=-\frac{13}{12}a-\frac{5}{2}$ — касательная, $b=-\frac{11}{24}a+\frac{5}{4}$ — проходит через искомую точку.

7.11. $\Phi=\{a^2+(b+5)^2=25\}/\{(-3;\ -1)\}$ — окружность с исключенной точкой $P=(-3;\ -1)$ (см. рис.). Прямые: $b=0$ — касательная, $b=\frac{4}{3}(a-10)$ — касательная, $b=\frac{1}{13}(a-10)$ проходит через искомую точку.

7.12. $\Phi=\left\{b=\frac{3}{10}(a^2-a-2)\right\}/\{(-6;\ 12)\}$ — парабола с исключенной точкой $P=(-6;\ 12)$ (см. рис.). Прямые: $a=4$ — параллельная оси, $b=\frac{21}{10}a-\frac{27}{5}$ — касательная, $b=-\frac{9}{10}a+\frac{33}{5}$ — проходит через исключенную точку.



К задаче 7.11.



К задаче 7.12.

7.13. $y=2(x+2)^2+25$.

7.14. $y=-\frac{1}{16}(x-8)^2$.

7.15. $y=-(x-1)^2-6$.

7.16. $y=\frac{1}{9}(x+9)^2$.

7.17. $\frac{23}{15}\frac{S}{v}$. Второй велосипедист обгонит первого впервые, проехав 5 полных кругов и еще $\frac{2}{15}S$.

7.18. $\frac{142}{5}\frac{S}{v}$. «Вольво» совершит обгон «Мерседеса», пройдя 12 полных кругов и еще $\frac{2}{5}S$.

7.19. $\frac{40}{9}\frac{S}{v}$. Второй лыжник обгонит первого впервые, проехав 14 полных кругов и еще $\frac{1}{9}S$.

7.20. $\frac{56}{3}\frac{S}{v}$. «Рено» совершит обгон «Крайслера», пройдя 10 полных кругов и еще $\frac{2}{3}S$.

7.21. Π_9, Π_{10}, Π_{11}. Турист должен сесть в автобус № 66, если в момент отплытия отправляется автобус № 0.

7.22. Π_7, Π_8, Π_9. Путешественник должен сесть в дилижанс № 21, если в момент отплытия отправляется дилижанс № 0.

7.23. Π_7, Π_8, Π_9. Студент должен сесть в электричку № 26, если в момент отплытия отправляется электричка № 0.

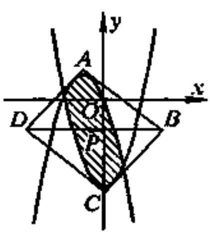
7.24. Π_8, Π_9, Π_{10}. Курьер должен сесть в кабриолет № 22, если в момент отплытия отправляется кабриолет № 0.

7.25. $S=\frac{81}{8}\sqrt{17}$ (M ограничено параболами Π_1: $y=x^2-\frac{9}{2}$, Π_2: $y=-x^2-4x$; точка $P(-1,-\frac{1}{4})$ — центр прямоугольника, коэффициенты наклона его сторон $k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$; вершины $B(\frac{9}{8}\sqrt{17}-1;\ -\frac{1}{4})$, $D(-1-\frac{9}{8}\sqrt{17};\ -\frac{1}{4})$).

7.26. $S=\frac{25}{2}\sqrt{17}$. Фигура M ограничена параболами $y=\frac{x^2}{2}-7$ и $y=-\frac{(x+2)^2}{2}+2$. Центр прямоугольника — точка $(-1;\ -\frac{5}{2})$

Решение. Обозначим коэффициенты при p^2 и p^{-2} через a и c соответственно. Пусть $t=p^2$. По условию множество M состоит из точек, для которых $f(t)=4+at+\frac{c}{t}\geqslant 0$ при всех $t>0$. Но $t\,f(t)=at^2+4t+c$ и $\frac{1}{t}\,f(t)=c\left(\frac{1}{t}\right)^2+4\cdot\frac{1}{t}+a$ — квадратные трехчлены относительно t и $\frac{1}{t}$ соответственно, для неотрицательности которых необходимо, чтобы $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$. Эти условия и достаточны, так как при их выполнении $f(t)\geqslant 4$, если $t>0$. Итак, M — множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}2y-x^2+14\geqslant 0,\\ -(x^2+4x+2y)\geqslant 0,\end{cases}$$



К задаче 7.26.

т.е. является фигурой, ограниченной параболами Π_1: $y=\frac{x^2}{2}-7$, Π_2: $y=-\frac{(x+2)^2}{2}+2$ (см. рис.).

Парабола Π_1 получена из параболы $y=\frac{x^2}{2}$ смещением на 7 вниз, а парабола Π_2 — из симметричной ей относительно начала координат параболы $y=-\frac{x^2}{2}$ смещением ее на 2 влево и на 2 вверх, поэтому множество M имеет центр симметрии — точку $P(-1;\ -\frac{5}{2})$ (точку P можно найти и как середину отрезка, соединяющего вершины парабол Π_1 и Π_2). Из центральной симметрии множества M следует, что центр прямоугольника $ABCD$ совпадает с точкой P. По условию $BD\|Ox$, поэтому точки B и D имеют координаты $B(x_0;\ -\frac{5}{2})$, $D(-2-x_0;\ -\frac{5}{2})$; тогда прямая CB имеет уравнение $y=k(x-x_0)-\frac{5}{2}$, а перпендикулярная ей прямая AB — $y=-\frac{1}{k}(x-x_0)-\frac{5}{2}$.

Прямая CB касается параболы Π_1, а прямая AB — параболы Π_2, поэтому дискриминанты квадратных уравнений

$$k(x-x_0)-\frac{5}{2}=\frac{x^2}{2}-7 \quad\text{и}\quad -\frac{1}{k}(x-x_0)-\frac{5}{2}=-\frac{(x+2)^2}{2}+2,$$

задающих абсциссы точек пересечения прямых с параболами, равны нулю, т. е.

$$D_1 = k^2 - 2kx_0 + 9 = 0, \quad D_2 = \frac{1}{k^2} - \frac{4}{k} - \frac{2x_0}{k} + 9 = 0.$$

Решив эту систему, получаем

$$k = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \quad (k > 0), \qquad x_0 = \frac{5}{4}\sqrt{17} - 1.$$

Отсюда $BD = \frac{5}{2}\sqrt{17}$, $S = AB \cdot BC = BD^2 \sin\alpha \cos\alpha$, где $\alpha = \angle DBC$, $\operatorname{tg}\alpha = k$, т.е. $S = BD^2 \operatorname{tg}\alpha \cos^2\alpha = BD^2 k \frac{1}{k^2+1} = \frac{25}{2}\sqrt{17}$.

7.27. $S = \frac{640}{7}\sqrt{2}$ (множество M ограничено параболами Π_1: $y = \frac{1}{2}x^2 - 13$, Π_2: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$; $P(-1;\ -\frac{11}{2})$ — центр прямоугольника, коэффициенты наклона его сторон $k_{1,2} = \frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$; вершины $B(\frac{40\sqrt{2}}{7} - 1;\ -\frac{11}{2})$, $D(-1 - \frac{40\sqrt{2}}{7};\ -\frac{11}{2})$).

7.28. $S = \frac{1125}{14}\sqrt{2}$ (множество M ограничено параболами Π_1: $y = x^2 - \frac{21}{2}$, Π_2: $y = -x^2 - 4x$; $P(-1;\ -\frac{13}{4})$ — центр прямоугольника, коэффициенты наклона его сторон $k_{1,2} = \frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$, вершины $B(\frac{75}{14}\sqrt{2} - 1;\ -\frac{13}{4})$, $D(-1 - \frac{75}{14}\sqrt{2};\ -\frac{13}{4})$).

7.29. $S_1 = \frac{8}{3}9^{\frac{1}{3}}$, $S_2 = \frac{8}{3}$.

Решение. Пусть $M(x_0;\ y_0)$ и $N(x_1;\ y_1)$ — точки, в которых прямые AB и CD касаются графика Γ функции $y = x^3 - 6$ (рис. *а*, *б*), тогда уравнения касательных:

$$AB\colon\ y - y_0 = 3x_0^2(x - x_0), \qquad CD\colon\ y - y_1 = 3x_1^2(x - x_1),$$

или, с учетом того, что $y_0 = x_0^3 - 6$, $y_1 = x_1^3 - 6$,

$$AB\colon\ y = 3x_0^2 x - (2x_0^3 + 6), \qquad CD\colon\ y = 3x_1^2 x - (2x_1^3 + 6).$$

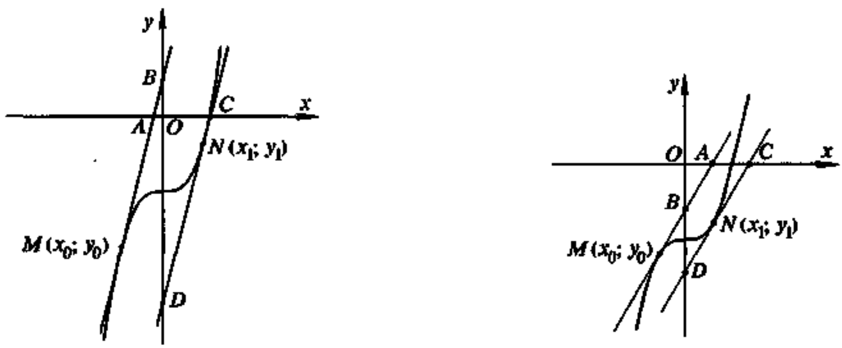
Параллельность касательных AB и CD означает, что $3x_0^2 = 3x_1^2$, т.е.

$$x_1 = -x_0, \tag{1}$$

а условие на площади треугольников AOB и COD означает, что $OD = 2OB$, т.е.

$$\begin{gathered} |-(2x_1^3 + 6)| = 2|-(2x_0^3 + 6)|, \text{ или} \\ x_1^3 + 3 = \pm 2(x_0^3 + 3). \end{gathered} \tag{2}$$

Система уравнений (1), (2) имеет два решения $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ и $x_0 = -9^{\frac{1}{3}}$, $x_1 = 9^{\frac{1}{3}}$, а прямая AB — уравнения $y = 3x - 4$ (рис. *б*) и $y = 9(3)^{\frac{1}{3}}x + 12$ (рис. *а*) соответственно. Для этих прямых $OA = \frac{4}{3}$ и $\frac{4}{3(3)^{\frac{1}{3}}}$, $OB = 4$ и 12 соответственно, поэтому треугольник OAB имеет площадь $\frac{8}{3}$ (случай *б*) или $\frac{8}{3}\,9^{\frac{1}{3}}$ (случай *а*).



а *б*

К задаче 7.29.

7.30. $S_1 = \frac{8}{9}$ $\quad (y = -9x - 4,\ x_0 = \frac{1}{3})$

$S_2 = 8$ $\quad (y = -\frac{1}{9}x + \frac{4}{3},\ x_0 = 3)$.

7.31. $S_1 = \frac{8(3)^{\frac{1}{3}}}{81}$ $\quad (y = \frac{x}{3^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{9},\ x_0 = \frac{1}{9^{\frac{1}{3}}})$

$S_2 = \frac{8}{27}$ $\quad (y = 3x - \frac{4}{3},\ x_0 = 1)$.

7.32. $S_1 = 8$ $\quad (y = -\frac{x}{4} - 2,\ x_0 = 2)$,

$S_2 = \frac{8}{9}$ $\quad (y = -\frac{81}{4}x + 6,\ x_0 = \frac{2}{9})$.

7.33. $p = 16$, $S = \frac{1}{2}$ ($p = 1$, $p = \frac{1}{2}$ — посторонние корни уравнения $\log_4^2 p = \log_{p/8} p$).

7.34. $p = 16$, $S = \frac{1}{8}$ ($p = 1$, $p = 2^{-15/2}$ — посторонние корни уравнения $\log_2^2 p = 30 \log_{8\sqrt{2}} p$).

Решение. Пусть a, b, c — длины сторон, h_a, h_b, h_c — длины высот треугольника, S — его площадь, тогда $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$. Если x_1, x_2, x_3 — корни кубического уравнения, то оно может быть записано в виде $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$ или $x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3=0$. Таким образом, $a+b+c=\frac{32}{p}$, $ab+bc+ca=\frac{5}{\sqrt{p}}$, $abc=\frac{15}{64}$, $\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}=\frac{1}{3}\,|\log_2 p|$, $\frac{4S^2}{ab}+\frac{4S^2}{bc}+\frac{4S^2}{ca}=\log_{8\sqrt{2}p} p$, $\frac{8S^3}{abc}=\frac{1}{11+\sqrt{p}}$. Последние три уравнения можно переписать в виде $2S\,\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{3}\,|\log_2 p|$, $4S^2\,\frac{c+a+b}{abc}=\log_{8\sqrt{2}p} p$, $\frac{8S^3}{abc}=\frac{1}{11+\sqrt{p}}$ и, исключив переменные a, b и c, мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{15}{64}=8S^3(11+\sqrt{p}),\\ \frac{5}{\sqrt{p}}=4S^2\,\frac{1}{3}\,|\log_2 p|\,(11+\sqrt{p}),\\ \frac{32}{p}=2S(\log_{8\sqrt{2}p} p)(11+\sqrt{p}).\end{cases}$$

Перемножив первые два уравнения и разделив на квадрат второго, получаем: $\log_2^2 p=30\log_{8\sqrt{2}p} p$, т. е. $\log_2^2 p=30\log_2 p/\log_2(8\sqrt{2}p)$. Положив $\log_2 p=t$, получаем $t^2=30t/\left(\frac{7}{2}+t\right)$ или $t\left(t^2+\frac{7}{2}t-30\right)=0$, откуда $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=-\frac{15}{2}$. Корень $t=0$ — посторонний, так как тогда $h_a+h_b+h_c=0$, что невозможно. Для корня $t=-\frac{15}{2}$ получаем $p=2^{-15/2}$ и последние два уравнения системы принимают вид

$$\begin{cases}5\cdot 2^{15/4}=4S^2\,\frac{5}{2}\left(11+2^{-15/4}\right),\\ 32\cdot 2^{15/2}=2S\,\frac{15}{8}\left(11+2^{-15/4}\right).\end{cases}$$

Полученная система несовместна.

Наконец, если $t=4$, то $p=16$. Получаем совместную систему, из которой находим S.

7.35. $p=\frac{1}{8}$, $S=\frac{1}{2}$ ($p=4$, $p=16\sqrt{2}$ — посторонние корни уравнения $\log_2^2\frac{p}{4}=\frac{25}{2}\log_{p\sqrt{2}}\frac{p}{4}$).

7.36. $p=5$, $S=\frac{1}{8}$ ($p=\frac{1}{5}$, $p=\frac{1}{5\sqrt{5}}$ — посторонние корни уравнения $\log_{\sqrt{5}}^2(5p)=4\log_{p/\sqrt{5}}(5p)$).

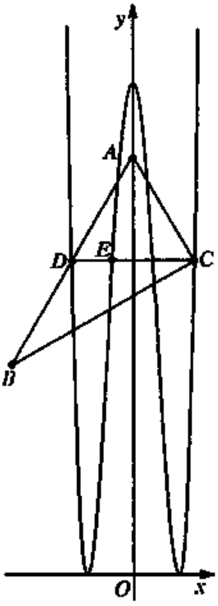
7.37. $x=\log_3\frac{5}{3}$.

7.38. $x=\log_4\frac{3}{2}$, $x=\log_4 5$.

7.39. $x=\log_7\frac{10}{3}$.

7.40. $x = \log_5 \frac{2}{3}$, $x = \log_5 \frac{5}{2}$.

7.41. CD: $y = 16$, $S = 18\sqrt{3}$.



К задаче 7.41.

Решение. По условию точки C и D симметричны относительно оси Oy (см. рис.), поэтому они имеют координаты $C(x_0, y_0)$, $D(-x_0, y_0)$. Тогда точка E пересечения медиан треугольника имеет координаты $E(-x_0/3, y_0)$, так как $CD = 2 \cdot DE$. Точки C и E лежат на графике, поэтому

$$y_0 = \left(\left(-\frac{x_0}{3}\right)^2 - 5\right)^2 = (x_0^2 - 5)^2,$$

откуда $x_0 = \pm 3$, $y_0 = 16$.

Далее по свойству медианы прямоугольного треугольника $CD = AD$, но $AD = AC$, значит, искомая площадь вдвое больше площади равностороннего треугольника ADC со стороной $2|x_0| = 6$.

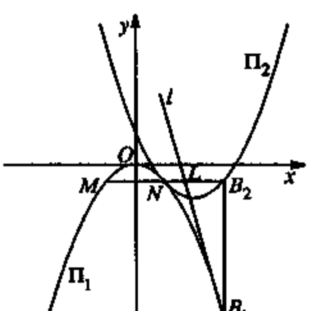
7.42. $y = 5x$, $AB = 18\sqrt{26}$. ($D(3;\ 15)$, $C(9;\ 45)$).

7.43. PL: $y = \frac{16}{25}$; $S = \frac{18\sqrt{3}}{5}$.

7.44. $y = 3x$, $KL = 12\sqrt{10}$.

7.45. $NL : LB = 1 : 2$, $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$.

Решение. Прямая пересекает параболу ровно в одной точке, если она параллельна ее оси, либо касается параболы. Оси парабол параллельны оси Oy (см. рис.), поэтому либо $B_1B_2 \| Oy$, либо B_1B_2 — общая касательная к параболам, что невозможно, так как единственная общая касательная данных парабол проходит через точку N. Итак $B_1B_2 \| Oy$, тогда $NB_2 \| Ox$, поэтому если точка M — точка пересечения NB_2 с Π_1, то $MN = 2b$, и из симметрии парабол следует $NB_2 = 2b$, откуда $B_2(3b, ab^2)$, $B_1(3b, 9ab^2)$ — координаты точек B_2 и B_1. Тогда касательная B_1L имеет уравнение $y = 6abx - 9ab^2$ и она пересекает прямую NB_2: $y = ab^2$ в точке $L\left(\frac{5}{3}b,\ ab^2\right)$. Отсюда получаем, что $NL = \frac{2}{3}b$, $B_2L = \frac{4}{3}b$, т. е. $NL : B_2L = 1 : 2$. Далее, из равенства



К задаче 7.45.

$\frac{1}{3} = S_{B_1B_2N} = \frac{1}{2}\,NB_2 \cdot B_1B_2 = 8|a|b^3$ следует, что $|a| = \frac{1}{24b^3}$. Поэтому $B_1L^2 = B_1B_2^2 + LB_2^2 = 64a^2b^4 + \frac{16}{9}\,b^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{b^2} + 16b^2\right)$. Наименьшее значение этой функции достигается при $b^2 = \frac{1}{4}$, т. е. $b = \frac{1}{2}$ и тогда $a = -\frac{1}{3}$.

Замечание. Искомые значения параметров a и b можно было найти иначе. Из того, что $B_2L = \frac{2}{3}\,B_2N$, следует, что $S_{B_1B_2L} = \frac{2}{3}\,S_{B_1B_2N} = \frac{2}{9}$, поэтому B_1L — диагональ прямоугольника LB_2B_1K площади 4/9 и она имеет наименьшую длину, если прямоугольник — квадрат, т. е. $LB_2 = B_2B_1$.

7.46. $B_1L : B_2L = 1:1$, $a = -3$, $b = \frac{1}{6}$ $(B_2(3b;\ ab^2),\ B_1(3b;\ 9ab^2),\ L(3b;\ 5ab^2))$.

7.47. $\frac{MK}{A_2K} = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{9}$, $b = \frac{3}{2}$ $\left(A_2(3b;\ ab^2),\ A_1(3b;\ 9ab^2),\ K\left(\frac{5}{3}\,b;\ ab^2\right)\right)$.

7.48. $A_1K : A_2K = 1:1$, $a = 2$, $b = \frac{1}{4}$ $(A_2(3b;\ ab^2),\ A_1(3b;\ 9ab^2),\ K(3b;\ 5ab^2))$.

7.49. $S = 10 - \frac{\pi}{4}$.

Решение. При $0 < y - x < 1$ первое неравенство принимает вид $2y - 2xy \geqslant (y-x)^2$, а при $1 < y - x$ — вид $0 < 2y - 2xy \leqslant (y-x)^2$. Таким образом, первое неравенство задает на плоскости множества

$$M_1\colon \begin{cases} x < y < x+1, \\ x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad M_2\colon \begin{cases} x + 1 < y, \\ x^2 + (y-1)^2 \geqslant 1, \\ y(x-1) < 0. \end{cases}$$

Второе неравенство задает угол $y \leqslant 4 - |x|$. Фигура Ф изображена на рисунке. Для нахождения площади фигуры Ф осталось заметить, что она равна сумме площадей треугольника ABO и трапеции $BCDE$ без площади четверти круга, так как треугольники EFO и OEK равны.

7.50. $S = \pi - 1$.

7.51. $S = \frac{5}{4}$.

7.52. $S = \frac{21}{2} - \pi$.

7.53. $a = -\frac{3}{2}$, $y_{\min} = -11$.

Решение. 1) Так как уравнение $-2x^3 - 8ax^2 - 4a^2x + 5 = 4a^2x + 5$ равносильно уравнению $x(x+2a) =$

К задаче 7.49.

$=0$, то точки $A(0; 5)$ и $B(-2a; 5-8a^3)$ являются общими точками графика функции $y=f(x)$ и прямой l, заданной уравнением $y=g(x)$, где $g(x)=4a^2x+5$.

Площадь S рассматриваемой фигуры определяется формулой

$$S=\left|\int\limits_0^{-2a}(g(x)-f(x))\,dx\right|=\left|\int\limits_0^{-2a}(2x^3+8ax^2+8a^2x)\,dx\right|=\frac{8a^4}{3}.$$

По условию $S=\frac{27}{2}$ и поэтому $a=-\frac{3}{2}$, так как $a<0$, а $f(x)=$ $=-2x^3+6x^2-9x+5$.

2) Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0, задаваемая уравнением $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, пересекает ось Oy в точке с ординатой $b(x_0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0$. В задаче требуется найти наименьшее значение $b_{\min}$ функции $b(x)=f(x)-xf'(x)$. Так как $b'(x)=-x\,f''(x)=-x(-6x+12)$, то уравнение $b'(x)=0$ имеет единственный положительный корень $x=2$, причем $b'(x)<0$ при $x<2$ и $b'(x)>0$ при $x>2$. Следовательно, $b_{\min}=b(2)=-11$.

7.54. $a=-3$, $y_{\max}=9$.

7.55. $a=1$, $y_{\min}=-\frac{34}{9}$.

7.56. $a=\frac{1}{2}$, $y_{\max}=2\frac{8}{27}$.

7.57. $a=-6$, $b=11$, $c=-5$.

7.58. $a=-6$, $b=-11$, $c=-6$.

7.59. $a=6$, $b=11$, $c=5$.

7.60. $a=6$, $b=-11$, $c=6$.

Решение. Пусть $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$, x_1 и x_2 — абсциссы точек A и B. Так как точки A и B симметричны относительно прямой $x=2$, то их ординаты одинаковы, а $x_1=2-t$, $x_2=2+t$, где $t>0$. Итак, $A\ (2-t; y_0)$, $B\ (2+t; y_0)$.

По условию $f'(x_1)=f'(x_2)$, т. е. $-3(2-t)^2+2a(2-t)+b=$ $=-3(2+t)^2+2a(2+t)+b$, откуда $24t=4at$, $a=6$, так как $t>0$. Следовательно,

$$f'(x_1)=f'(x_2)=-3(2+t)^2+12(2+t)+b=-3t^2+12+b. \quad (1)$$

Но $f(x_1)=f(x_2)$, т. е. $-(2-t)^3+6(2-t)^2+b(2-t)+c=$ $=-(2+t)^3+6(2+t)^2+b(2+t)+c$. Это равенство можно записать в виде $2t^3-24t-2bt=0$, откуда

$$b=t^2-12, \quad (2)$$

так как $t>0$.

Из (1) и (2) следует, что

$$f'(x_1) = f'(x_2) = -2t^2 < 0,$$

и поэтому касательная l_1 к графику функции $y = f(x)$, проходящая через точку A, лежит ниже касательной l_2, проходящей через точку B. Поэтому прямая l_1 проходит через точку C (0; 2) и задается уравнением

$$y - y_0 = -2t^2[x - (2 - t)],$$

а прямая l_2 проходит через точку D (0; 6) и задается уравнением

$$y - y_0 = -2t^2[x - (2 + t)].$$

Так как точки C и D принадлежат соответственно прямым l_1 и l_2, то

$$\begin{aligned} 2 - y_0 &= 2t^2(2 - t), \\ 6 - y_0 &= 2t^2(2 + t), \end{aligned} \tag{3}$$

откуда получаем

$$4 = 4t^3, \quad t = 1, \quad x_1 = 2 - t = 1,$$

а из (2) находим $b = -11$.

Подставляя $t = 1$ в уравнение (3), находим $y_0 = 0$. Так как $f(x_1) = f(1) = y_0 = 0$, то $-1 + 6 - 11 + c = 0$, откуда $c = 6$.

7.61. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

7.62. $\frac{13\sqrt{10}}{16}$.

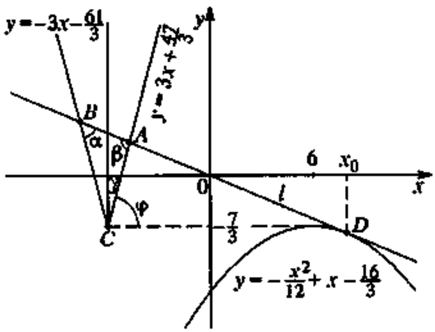
Решение. Построим графики функций $y = -\frac{x^2}{12} + x - \frac{16}{3}$ и $y = 3|x + 6| - \frac{7}{3}$ (см. рис.), заметив, что $C\left(-6; -\frac{7}{3}\right)$ — точка минимума функции $y = 3|x + 6| - \frac{7}{3}$.

Пусть l — касательная к параболе $y = f(x) = -\frac{x^2}{12} + x - \frac{16}{3}$, D $(x_0; y_0)$ — точка касания прямой l с параболой, k — угловой коэффициент прямой l. Тогда $k = f'(x_0) = 1 - \frac{x_0}{6}$, а уравнение прямой l можно записать в виде $y - f(x_0) = k(x - x_0)$.

Пусть A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ — точки пересечения прямой l с прямыми $y = 3x + \frac{47}{3}$ и $y = -3x - \frac{61}{3}$ соответственно, $\angle CBA = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle BCA = 2\gamma$ (см. рис.).

По условию $\beta = \alpha + 2\gamma$. С другой стороны, $\beta = \pi - (\alpha + 2\gamma)$, откуда следует, что $\beta = \frac{\pi}{2}$, т. е. прямые AC и l взаимно перпендикулярны.

Так как угловой коэффициент k_1 прямой AC равен 3, то $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{3}$, т. е. $1 - \frac{x_0}{6} = -\frac{1}{3}$, откуда $x_0 = 8$, $f(8) = -\frac{8}{3}$ и поэтому уравнение прямой l примет вид $y + \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}(x - 8)$, т. е. $y = -\frac{1}{3}x$.



К задаче 7.62.

Найдем координаты точки B, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = -3x - \frac{61}{3}, \\ y = -\frac{1}{3}x. \end{cases}$$

Получим $x_2 = -\frac{61}{8}$, $y_2 = \frac{61}{24}$.

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, тогда $R = \frac{BC}{2}$, где

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{61}{8} + 6\right)^2 + \left(\frac{61}{24} + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{8}\right)^2 + \left(\frac{39}{8}\right)^2} = \frac{13}{8}\sqrt{10}\ .$$

7.63. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

7.64. $\frac{13\sqrt{10}}{32}$.

7.65. 6, $\frac{25}{6}$.

7.66. 18, $\frac{73}{6}$.

Решение. 1) Так как указанные в условии задачи числа являются длинами сторон треугольника, то эти числа положительны и удовлетворяют неравенству треугольника, т. е.

$$\begin{cases} 0 < 3x < 2y + 9 - y, \\ 0 < 2y < 3x + 9 - y, \\ 0 < 9 - y < 3x + 2y, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y - 3x + 9 > 0, \\ y - x - 3 < 0, \\ y + x - 3 > 0, \\ x > 0,\ y > 0,\ y < 9. \end{cases} \qquad (1)$$

Условиям (1) удовлетворяют точки треугольника ABC (см. рис.), где $A\,(0;3)$, $B\,(6;9)$, $C\,(3;0)$, а площадь S фигуры M равна $S_1 - S_2 - S_3$, где S_1 — площадь трапеции $OABD$, $D\,(6;0)$, S_2 — площадь треугольника OAC, S_3 — площадь треугольника BCD. Так как $S_1 = \frac{1}{2}(3 + 9)6 = 36$, $S_2 = \frac{9}{2}$, $S_3 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 9 = \frac{27}{2}$, то $S = 18$.

2) Неравенство

$$t^2 + 2t(x - 2) + 7 - y > 0$$

является верным при всех $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $(x-2)^2-(7-y)<0$, т. е.

$$y<7-(x-2)^2. \qquad (2)$$

Условию (2) удовлетворяют все точки, лежащие под параболой $y=7-(x-2)^2$ с вершиной E (2; 7).

Пусть l_1, l_2, l_3 — прямые, заданные соответственно уравнениями $y=3x-9$, $y=3-x$ и $y=x+3$. Парабола пересекает прямую l_1 в точке F (4; 3), а прямую l_3 — в точках A и K (3; 6).

Если σ — площадь фигуры Φ, то $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$, где σ_1 — площадь треугольника ACF, σ_2 — площадь треугольника AKM, M (3; 3), σ_3 — площадь криволинейного треугольника KMF. Так как $\sigma_1=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$, $\sigma_2=\frac{9}{2}$, $\sigma_3=\int\limits_3^4(-x^2+4x)\,dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_3^4=\frac{5}{3}$, то $\sigma=\frac{73}{6}$.

7.67. 6, $\frac{25}{6}$.

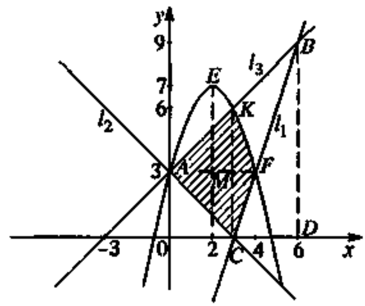
7.68. 18, $\frac{73}{6}$.

7.69. 3, $\frac{7\ln 6-10}{3}$.

7.70. 2, $15\ln 2-9$.

7.71. 2, $\frac{7\ln 6}{2}-5$.

7.72. $4\ln 5-\frac{16}{3}$.



К задаче 7.66.

Решение.

Точка $A(0;4)$ при любом a является общей точкой прямой $y=-12x+4$ и фигуры M. Поэтому эта прямая должна быть касательной к графику функции $y_1=4e^{-ax}$ в точке $x=0$. Так как $y_1'(0)=-4a$, то $-12=-4a$, откуда $a=3$.

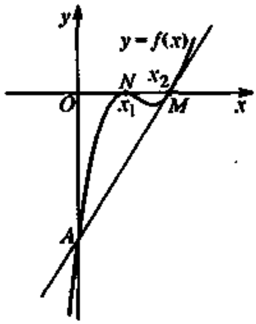
Найдем общие точки кривых $y_1=4e^{-3x}$ и $y_2=12-5e^{3x}$, решив уравнение $\frac{4}{t}=12-5t$, где $t=e^{3x}$. Это уравнение имеет корни $t_1=\frac{2}{5}$, $t_2=2$. Если $t=\frac{2}{5}$, то $e^{3x}=\frac{2}{5}$, откуда $x_1=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}$, а если $t=2$, то $e^{3x}=2$, откуда $x_2=\frac{1}{3}\ln 2$. Искомая площадь

$$S=\int\limits_{x_1}^{x_2}(y_2-y_1)\,dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}(12-5e^{3x}-4e^{-3x})\,dx=$$
$$=\left(12x-\frac{5}{3}e^{3x}+\frac{4}{3}e^{-3x}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}=4\ln 5-\frac{16}{3}.$$

7.73. $a = -4$, $b = 5$, $c = -2$.

Решение.

Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек, в которых график функции $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, где $c < 0$, пересекает ось Ox. Тогда x_1 и x_2 — корни многочлена $f(x)$, а $f(x)$ делится на $(x - x_1)(x - x_2)$, откуда следует, что $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - \alpha)$, где α — одно из чисел x_1, x_2 (уравнение $f(x) = 0$ по условию имеет ровно два различных корня). Таким образом, многочлен $f(x)$ имеет вид $f(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)$, откуда находим $f'(x_1) = 0$ и касательная к графику функции в точке $(x_1, 0)$ совпадает с осью Ox.



К задаче 7.73.

По условию ордината точки A равна c, где $c < 0$, *а касательная к графику функции* $y = f(x)$ в точке M проходит через точку A. Поэтому абсцисса точки M равна x_2, а абсцисса точки N равна x_1 (см. рис.). Задача сводится к нахождению чисел x_1 и x_2. Так как $f'(x_2) = (x_2 - x_1)^2 = k$, то уравнение прямой, касающейся в точке M графика функции $y = f(x)$, имеет вид $y = k(x - x_2)$. Эта прямая проходит через точку $A(0, c)$, где $c = -kx_2$ и $x_2x_1^2 = x_2(x_2 - x_1)^2$, откуда $x_2 = 2x_1$ $(x_2 \neq 0)$ и $c = -2x_1^3$.

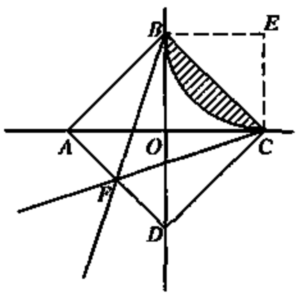
Пусть S — площадь треугольника AMN, тогда $S = 1 = -c\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}cx_1$, откуда $c = -\frac{2}{x_1} = -2x_1^3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $f(x) = (x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

7.74. $a = -4$, $b = -5$, $c = -2$.

7.75. $a = 4$, $b = 5$, $c = 2$.

7.76. $a = 4$, $b = -5$, $c = 2$.

7.77. а) 8; б) $10 - \pi$; в) $6 - \pi$.



К задаче 7.77.

Решение. а) Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие в квадрате (рис.) с вершинами $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 0)$, $D(0; -1)$. Площадь этого квадрата $S_1 = 8$.

б) Второму неравенству, которое можно записать в виде

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \geqslant 4,$$

удовлетворяют точки, лежащие вне круга радиуса 2 с центром в точке $E(2; 2)$.

Площадь заштрихованного на рис. сегмента равна $\pi-2$, а площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют первым двум неравенствам, равна $S_2=8-(\pi-2)=10-\pi$.

в) Прямые $y-3x-2=0$ и $3y-x+2=0$ пересекаются в точке $F(-1;\,1)$ и проходят соответственно через точки B и C.

Третьему неравенству удовлетворяют точки двух вертикальных углов с вершиной F, один из этих углов — угол, образуемый лучами FB и FC и содержащий точку O.

Пусть S_3 — площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют всем трем неравенствам системы, S_4 — сумма площадей треугольников ABF и CDF. Тогда $S_4=\frac{1}{2}S_1=4$, $S_3=S_2-S_4=6-\pi$.

7.78. а) 18; б) $\frac{9}{4}(10-\pi)$; в) $\frac{9}{4}(6-\pi)$.

7.79. а) 32; б) $4(10-\pi)$; в) $4(6-\pi)$.

7.80. а) 50; б) $\frac{25}{4}(10-\pi)$; в) $\frac{25}{4}(6-\pi)$.

7.81. 3 и 2.

Решение. 1) Последние цифры чисел 2^k повторяются через 4 ($2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$ и т. д.). Поэтому последняя цифра у числа 2^{2002} такая же, как и у числа 2^2 (2000 делится на 4), т. е. 4.

Аналогично, последняя цифра у числа 3^{2002} такая же, как и у числа 3^2, т. е. 9. Следовательно, последняя цифра числа a такая же, как у суммы $4+9=13$, т. е. тройка.

2) Остатки от деления на 11 чисел вида 2^n повторяются с периодом 10. Поэтому остаток от деления числа 2^{2002} на 11 равен остатку от деления на 11 числа 2^2, т. е. равен 4.

Аналогично, остатки от деления на 11 чисел вида 3^k повторяются с периодом 5. Поэтому остаток от деления числа 3^{2002} на 11 равен остатку от деления на 11 числа 2^2, т. е. равен 9.

Следовательно, остаток от деления на 11 числа a равен остатку от деления на 11 суммы $4+9$, т. е. равен 2.

7.82. 8 и 3.

7.83. 3 и 8.

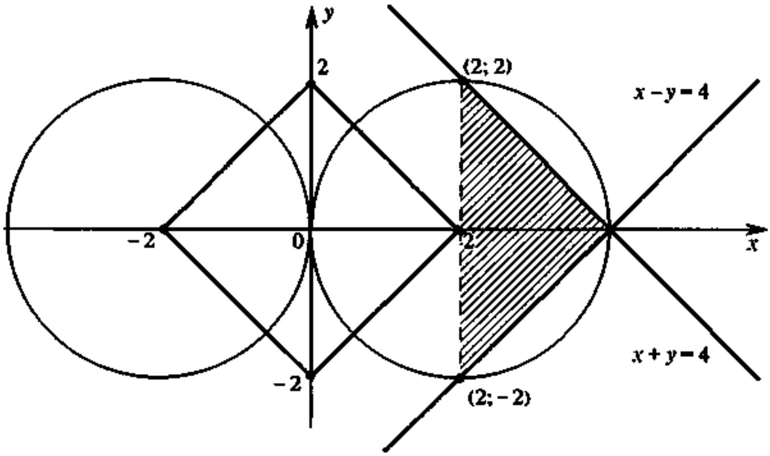
7.84. 3 и 9.

7.85. а) 8π, б) 6π, в) $4\pi+4$.

Решение. а) Первому неравенству, равносильному совокупности двух неравенств $(x-2)^2+y^2\leqslant 4$, $(x+2)^2+y^2\leqslant 4$, удовлетворяют координаты точек, находящихся внутри и на границах двух кругов радиуса 2 с центрами $(-2,\,0)$ и $(2,\,0)$ (см. рис.). Площадь этой фигуры $S_1=2\cdot\pi\cdot 2^2=8\pi$.

б) Второму неравенству удовлетворяют координаты точек, расположенных вне (и на границе) квадрата с вершинами $(-2,\,0)$, $(0,\,2)$,

$(2, 0)$, $(0, -2)$. Площадь S_2 фигуры Φ_2, координаты точек которой удовлетворяют первым двум неравенствам системы, равна $S_1 - S_0$, где S_0 — половина площади круга радиуса 2, т. е. $S_2 = 8\pi - 2\pi = 6\pi$.



К задаче 7.85.

в) Третье неравенство можно записать в виде $(x-4)^2 - y^2 \geqslant 0$, или $(x+y-4)(x-y-4) \geqslant 0$. Этому неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри и на границе одной из двух пар вертикальных углов, образующихся при пересечении прямых $x+y-4=0$ и $x-y-4=0$. Так как $(0, 0)$ — решение третьего неравенства системы, то этому неравенству удовлетворяют координаты точек фигуры Φ_2, лежащих в прямом угле с вершиной $(4, 0)$, таких, что $x \leqslant 4$. Площадь S_3 фигуры Φ_3 равна $\frac{2}{3} S_2 + \sigma_0$, где σ_0 — площадь прямоугольного треугольника с вершинами $(2, 2)$, $(4, 0)$, $(2, -2)$, т. е. $\sigma_0 = 4$.

Следовательно, $S_3 = 4\pi + 4$.

7.86. а) 8π; б) 6π; в) $4\pi + 4$.
7.87. а) 8π, б) 6π, в) $4\pi + 4$.
7.88. а) 8π; б) 6π; в) $4\pi + 4$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЗАДАЧИ

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ